

Ảnh hưởng của số lượng phần tử đến tính toán tần số dao động riêng của kết cấu dầm và khung phẳng theo phương pháp phần tử hữu hạn

The Influence of the number of Element to Calculation of the eigen Frequency of Beam and Frame Structure According to Finite Element Method (FEM)

Đặng Hồng Long, Lê Công Duy

*Khoa Xây dựng, Đại học Duy Tân, Việt Nam
Faculty of civil Engineering, Duy Tan University, Vietnam*

(Ngày nhận bài: 28/12/2016, ngày phản biện xong: 11/02/2017, ngày chấp nhận đăng: 05/04/2017)

Tóm tắt

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) là một phương pháp hiệu quả để giải quyết các bài toán động lực học công trình hiện nay. Vấn đề phân chia số lượng phần tử có ảnh hưởng lớn đến kết quả của bài toán, tuy nhiên chưa có nhiều phân tích để làm rõ vấn đề này trong các bài toán động học. Trong bài báo này, tác giả sử dụng phương pháp PTHH để đánh giá ảnh hưởng của việc chia số lượng phần tử khung, khối lượng phân bố đều đến tần số dao động riêng của một số kết cấu phẳng, so sánh kết quả tính với các phương pháp giải tích từ đó đưa ra một số kết luận.

Từ khóa: Phương pháp phần tử hữu hạn, tần số, dao động, kết cấu phẳng, phương pháp giải tích.

Abstract

Currently, Finite Element Method (FEM) is an effective method to solve the Dynamic structure problems. The numbers of element affects the problem's result, still, there are few analysis bringing this problem to light. In this paper, we apply FEM to estimate the influence of the divided number of frame element in which the weight of frame element is distributed uniformly per unit of element to the eigen frequency of a flat structure, the problem's results are compared to analytical method's in order to get some recommendations.

Keywords: The finite element method, eigen frequency, dynamic, plane structure, analytical method.

© 2017 Bản quyền thuộc Đại học Duy Tân

1. Đặt vấn đề

Dao động của công trình có ảnh hưởng lớn và mang tính quyết định đến việc thiết kế, tính toán kết cấu công trình. Vấn đề nghiên cứu động lực học công trình đã và đang được nghiên cứu

ở nhiều nước trên thế giới [5],[6],[7], cũng như ở trong nước [1],[2],[3],[4]. Để xác định sự ảnh hưởng của tải trọng tác động lên công trình, cũng như tránh hiện tượng cộng hưởng trong dao động thì cần phải xác định được đặc trưng dao động riêng của công trình (tần số hoặc chu kỳ dao

động, dạng dao động...).

Có nhiều phương pháp xây dựng và giải quyết bài toán dao động của kết cấu như phương pháp tĩnh (dựa theo nguyên tắc cân bằng tĩnh học, bổ sung các lực quán tính theo nguyên lý D'Alembert), phương pháp năng lượng (dựa trên nguyên lý bảo toàn năng lượng) [2],[3],[4]. Hiện nay, các phương pháp gần đúng (phương pháp năng lượng Rayleigh, Lagrange-Ritz, phương pháp thay thế khối lượng, phương pháp sai phân...) đang được nghiên cứu và sử dụng có hiệu quả nhờ sự phát triển của máy tính. Đặc biệt là phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) giúp giải các bài toán dao động nhanh hơn, cho kết quả của các tần số dao động riêng sai số chấp nhận được so với phương pháp chính xác.

Khi sử dụng phương pháp PTHH, hệ được rời rạc hóa thành các phần tử (PT) với số lượng hữu hạn, sau đó các PT được liên kết lại với nhau tại các điểm nút và phải đảm bảo tính liên tục về biến dạng. Tuy nhiên dễ nhận thấy rằng, việc chia lưới phần tử càng mau (tức là tăng số lượng phần tử) thì kết quả tính càng chính xác nhưng số lượng ẩn số càng tăng làm khó khăn cho việc tính toán. Trong bài báo này, tác giả

sẽ sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị kết hợp với lập trình tính toán trên phần mềm Matlab để khảo sát ảnh hưởng của việc phân chia số lượng phần tử đến tần số dao động riêng ω của một số kết cấu cơ bản, từ đó đưa ra một số khuyến cáo trong thực hành tính toán.

2. Phương trình vi phân dao động riêng theo phương pháp PTHH

Khi công trình dao động tự do, không có cản thì phương trình vi phân dao động theo thời gian có dạng [], []:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = 0 \quad (1)$$

Trong đó:

- $[M], [K]$ lần lượt là ma trận khối lượng, ma trận độ cứng tổng thể của hệ kết cấu, có dạng ma trận vuông kích thước $(n \times n)$ tùy thuộc vào số bậc tự do của tất cả các nút. Đối với kết cấu khung phẳng, ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phần tử thanh có liên kết cứng hai đầu trong hệ tọa độ địa phương được tính toán dựa trên nền tảng lý thuyết dầm cổ điển (Lý thuyết dầm Euler-Bernoulli) như sau [2][3]:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[m_e] = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 156b & 22lb & 0 & 54b & -13lb \\ 0 & 22lb & 4l^2b & 0 & 13lb & -3l^2b \\ a & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 54b & 13lb & 0 & 156b & -22lb \\ 0 & -13lb & -3l^2b & 0 & -22lb & 4l^2b \end{bmatrix} \quad (3)$$

Với ký hiệu:

$$a = \frac{m \cdot l}{6}; \quad b = \frac{m \cdot l}{420}$$

- E, A, I, l, m lần lượt là các đại lượng Modun đàn hồi, tiết diện ngang, momen quán tính của tiết diện, chiều dài phần tử và khối lượng phân bố theo chiều dài.

Các ma trận $[M]$ và $[K]$ trong hệ tọa độ tổng thể của kết cấu được ghép nối từ các ma trận của các phần tử thông qua tọa độ của các nút. Muốn

vậy phải quy đổi các ma trận khối lượng phần tử $[m_e]$, ma trận độ cứng phần tử $[k_e]$ trong hệ tọa độ địa phương về hệ tọa độ tổng thể tương ứng là $[m_e]$ và $[k_e]$ theo công thức:

$$[m_e] = [T_e]^T \cdot [m_e'] \cdot [T_e] \quad ; \quad [k_e] = [T_e]^T \cdot [k_e'] \cdot [T_e]$$

Trong đó: $[T]_e$ là ma trận chuyển đổi tọa độ của từng phần tử, và có cấu trúc như sau:

$$T_e = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Với:

$$n_1 = \frac{x_2 - x_1}{l}; n_2 = \frac{y_2 - y_1}{l}; l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$x_1; x_2$: Hoành độ của nút đầu và nút cuối của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể.

$y_1; y_2$: Tung độ của nút đầu và nút cuối của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể.

l : Chiều dài phần tử.

- $u_i(t); \dot{u}(t)$: Chuyển vị và gia tốc chuyển vị (ngang, đứng, xoay) tại các nút, có dạng dao động điều hòa.

Khi hệ dao động riêng, các nút chuyển động theo quy luật hàm điều hòa với các tần số dao động riêng khác nhau. Trong đó các tần số dao động riêng được xác định từ phương trình tần số:

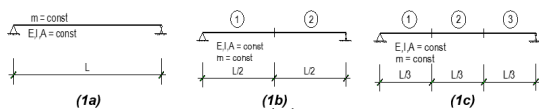
$$\det([K^*] - \omega_i^2 \cdot [M^*]) = 0 \quad (5)$$

Với $[K^*], [M^*]$ là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng tổng thể của hệ kết cấu sau khi khử suy biến. Quá trình ghép nối các phần tử sẽ được lập trình tự động trên Matlab, để giải phương trình tần số (5) tác giả sử dụng thuật toán QR lập trình trên Matlab. Một số trường hợp khảo sát cụ thể trong mục 3.

3. Ví dụ tính toán khảo sát ảnh hưởng của số lượng phần tử đến tần số dao động riêng.

3.1. Dầm đơn giản

Xét dầm đơn giản (sơ đồ như hình 1a) có khối lượng phân bố đều $m=3750$ (N/m), tiết diện chữ nhật $A = 0.15(m^2)$, mô men quán tính tiết diện $I = 9/2000(m^4)$, mô đun đàn hồi vật liệu $E = 27 \times 10^9$ (N/m²).



Hình 1. Sơ đồ dầm đơn giản. 1a,b,c.. Sơ đồ dầm chia 1 phần tử, 2 phần tử, 3 phần tử

Với sơ đồ 1a, tần số dao động riêng theo nghiệm giải tích là [2],[3],[4]:

$$\omega_i = \frac{(i\pi)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \text{với } (i = 1, 2, 3 \dots) \quad (6)$$

Tiến hành khảo sát ảnh hưởng của số lượng phân chia phần tử theo phương pháp PTHH với các sơ đồ 1a,1b,1c trong trường hợp nhịp dầm thay đổi $L=4(m)$, $L=6(m)$, $L= 8(m)$. Quá trình tính toán tần số dao động riêng được lập trình trên Matlab, kết quả so sánh với nghiệm giải tích cho 2 tần số cơ bản đầu tiên được lập thành Bảng 1 đến Bảng 3.

Bảng 1. Trường hợp $L = 4(m)$

Tần số (s ⁻¹)	Kết quả theo (6)	Theo phương pháp PTHH					
		Sơ đồ 1a $l=L=4(m)$	Sai số (%)	Sơ đồ 1b $l=L/2=2(m)$	Sai số (%)	Sơ đồ 1c $l=L/3=4/3(m)$	Sai số (%)
ω_1	111.0330	123.2376	11.0	111.4713	0.39	111.1230	0.08
ω_2	444.1322	564.7455	27.16	492.9503	11.0	449.3820	1.18

Bảng 2. Trường hợp $L = 6(m)$

Tần số (s ⁻¹)	Kết quả theo (6)	Theo phương pháp PTHH					
		Sơ đồ 1a $l=L=6(m)$	Sai số (%)	Sơ đồ 1b $l=L/2=3(m)$	Sai số (%)	Sơ đồ 1c $l=L/3=3(m)$	Sai số (%)
ω_1	49.3482	54.7723	11.0	49.5428	0.39	49.3880	0.08
ω_2	197.3930	250.9680	27.16	219.0890	11.0	199.7253	1.18

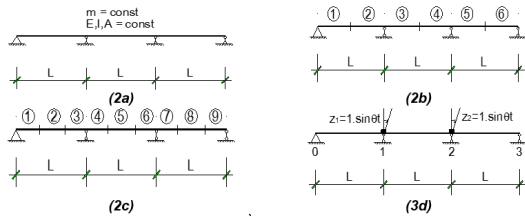
Bảng 3. Trường hợp $L = 8(m)$

Tần số (s ⁻¹)	Kết quả theo (6)	Theo phương pháp PTHH					
		Sơ đồ 1a $l=L=8(m)$	Sai số (%)	Sơ đồ 1b $l=L/2=4(m)$	Sai số (%)	Sơ đồ 1c $l=L/3=8/3(m)$	Sai số (%)
ω_1	27.7584	30.8094	11.0	27.8678	0.39	27.7807	0.08
ω_2	111.0336	141.1864	27.16	123.2376	11.0	112.3455	1.18

Nhận xét: Chiều dài của phần tử không ảnh hưởng đến sai số chênh lệch giữa kết quả theo PTHH và theo phương pháp giải tích khi nhịp dầm thay đổi. Trường hợp xem nhịp dầm là 1 phần tử (sơ đồ 1a) thì kết quả sai số lớn. Khi xét đến tần số cơ bản thứ 2 thì nên chia từ 3 phần tử trở lên thì kết quả theo PTHH xấp xỉ tốt với nghiệm giải tích (sai số khoảng 1%).

3.2. Dầm liên tục

Xét dao động riêng của một dầm liên tục 3 nhịp (hình 2a) có khối lượng phân bố đều $m=3750$ (N/m), tiết diện chữ nhật $A = 0.15(m^2)$, mô men quán tính tiết diện $I = 9/2000(m^4)$, mô đun đàn hồi vật liệu $E = 27 \times 10^9$ (N/m²).



Hình 2. Dầm liên tục 3 nhịp 3a,b,c. Mô hình mỗi nhịp dầm chia lần lượt 1 phần tử, 2 phần tử và 3 phần tử 3d. Hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị

Theo phương pháp chuyển vị thì hệ cơ bản được chuyển về như hình 3d. Phương trình tần số có dạng:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Trong đó:

$$r_{11} = r_{22} = \frac{3EI}{L} \Psi_5(\lambda) + \frac{4EI}{L} \Psi_1(\lambda);$$

$$r_{21} = \frac{2EI}{L} \Psi_2(\lambda).$$

$\lambda = k.L$ là thông số chuẩn lấy theo 1 nhịp dầm.

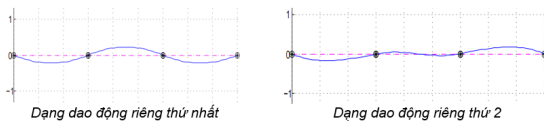
Ψ_i : là các hàm Krulôv theo λ [2].

Suy ra:

$$\left[\frac{3EI}{L} \Psi_5(\lambda) + \frac{4EI}{L} \Psi_1(\lambda) \right]^2 - \left[\frac{2EI}{L} \Psi_2(\lambda) \right]^2 = 0 \quad (7)$$

Giải phương trình (7), tìm được 2 nghiệm đầu tiên là $\lambda_1 = 3.1416$ và $\lambda_2 = 3.5564$. Tần số dao động riêng tương ứng của hệ theo phương pháp chuyển vị là:

$$\omega_i = \left(\frac{\lambda_i}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (8)$$



Hình 3. Hai dạng dao động cơ bản của dầm liên tục 3 nhịp

Khảo sát bài toán khi nhịp dầm thay đổi $L=3(m)$ và $L=6(m)$ theo phương pháp phần tử hữu hạn trong trường hợp mỗi nhịp dầm chia 1 phần tử (sơ đồ 2a), chia 2 phần tử (sơ đồ 2b) và chia 3 phần tử (sơ đồ 2c). Quá trình tính toán theo phương pháp PTHH được xây dựng trên Matlab, kết quả so sánh với nghiệm giải tích theo phương pháp chuyển vị trình bày ở bảng 4, bảng 5.

Bảng 4. Trường hợp $L = 3(m)$

Tần số (s ⁻¹)	Kết quả theo (8)	Theo phương pháp PTHH					
		Sơ đồ 2a l=L=3(m)	Sai số (%)	Sơ đồ 2b l=L/2=1.5(m)	Sai số (%)	Sơ đồ 2c l=L/3=1(m)	Sai số (%)
ω_1	197.3930	219.0890	11.0	198.1712	0.39	197.5519	0.08
ω_2	252.9597	302.7149	19.67	254.5753	0.65	253.2962	0.13

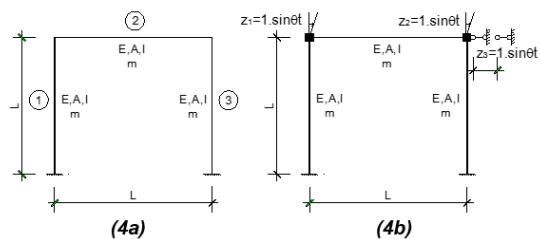
Bảng 5. Trường hợp $L = 6(m)$

Tần số (s ⁻¹)	Kết quả theo (8)	Theo phương pháp PTHH					
		Sơ đồ 2a l=L=6(m)	Sai số (%)	Sơ đồ 2b l=L/2=3(m)	Sai số (%)	Sơ đồ 2c l=L/3=2(m)	Sai số (%)
ω_1	49.3483	54.7723	11.0	49.5428	0.39	49.3880	0.08
ω_2	63.2399	75.6787	19.67	63.6488	0.65	63.3241	0.13

Nhận xét: Chiều dài của phần tử không ảnh hưởng đến sai số chênh lệch giữa kết quả theo PTHH và theo phương pháp giải tích khi nhịp dầm thay đổi. Trường hợp xem nhịp dầm là 1 phần tử (sơ đồ 2a) thì kết quả sai số lớn. Khi xét đến tần số cơ bản thứ 2 nên chia từ 2 phần tử trở lên sẽ cho kết quả xấp xỉ tốt với nghiệm giải tích (= sai số dưới 1%).

3.3. Kết cấu khung

Xét khung 1 tầng 1 nhịp như hình 4a, các thông số đầu vào như sau: tiết diện $A=0.1(m^2)$, mô men quán tính tiết diện $I=1/750 (m^4)$, mô đun đàn hồi vật liệu $E = 27 \times 10^9 (N/m^2)$, khối lượng phân bố đều $m=2500 (N/m)$, $L = 6(m)$.



Hình 4. Mô hình khung 1 tầng 1 nhịp 4a. Cột và dầm chia 1 phần tử theo PTHH; 4b. Hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị

Hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị như hình 4b có 3 bậc tự do. Tần số dao động riêng theo phương pháp chuyển vị là nghiệm của phương trình tần số :

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Với r_{ij} là giá trị phản lực tại liên kết i do chuyển vị đơn vị tại liên kết j gây ra.

$$r_{11} = \frac{8EI}{L} \Psi_1(\lambda); \quad r_{22} = \frac{8EI}{L} \Psi_1(\lambda); \quad r_{33} = \frac{24EI}{L^3} \epsilon_3(\lambda) - \frac{\lambda^4 EI}{L^3};$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{2EI}{L} \Psi_2(\lambda); \quad r_{23} = r_{32} = \frac{-6EI}{L^2} \Psi_3(\lambda); \quad r_{13} = r_{31} = \frac{-6EI}{L^2} \Psi_3(\lambda);$$

Trong đó:

$\lambda = k.L$ là thông số chuẩn lấy theo phần tử cột (hoặc dầm) trên sơ đồ (4b).

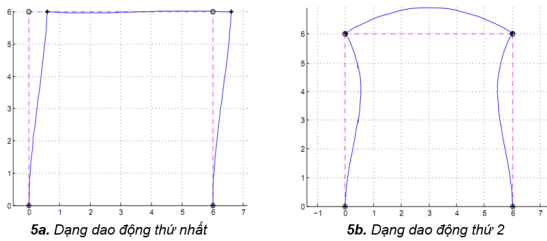
$\Psi_i; \epsilon_i$: là các hàm Krulov theo λ [2].

Khai triển định thức và thay các giá trị r_{ij} ta được phương trình tần số rút gọn như sau:

$$(16.\Psi_1^2 - \Psi_2^2) \cdot (24.\epsilon_3 - \lambda^4) + 36.\Psi_3^2 \cdot (\Psi_2 - 4\Psi_1) = 0 \quad (9)$$

Giải phương trình tần số (9) ta được 2 nghiệm cơ bản đầu tiên là $\lambda_1 = 1.7895$ và $\lambda_2 = 3.5564$. Tần số dao động riêng tương ứng theo (8): $\omega_1 = 10.6744 \text{ (s}^{-1}\text{)}$; $\omega_2 = 42.1599 \text{ (s}^{-1}\text{)}$.

Để làm rõ ảnh hưởng của số lượng phần tử trong dầm theo phương pháp PTHH đến tần số dao động riêng, tác giả tiến hành đánh giá theo 3 trường hợp: dầm chỉ chia 1 phần tử (sơ đồ 4a), dầm chia 2 phần tử ($l=L/2=3\text{(m)}$), dầm chia 3 phần tử ($l=L/3=2\text{(m)}$). Chú ý rằng tất cả các trường hợp thì cấu kiện cột chỉ chia 1 phần tử. Kết quả khảo sát và so sánh được trình bày theo bảng 6.



Hình 5. Hai dạng dao động riêng cơ bản

Bảng 6. Ảnh hưởng của số lượng phần tử trong dầm đến tần số dao động riêng

Tần số (s ⁻¹)	Theo (9)	Theo phương pháp PTHH					
		Dầm chia 1 phần tử (SD 3a)	Sai số (%)	Dầm chia 2 phần tử (l=L/2=3(m))	Sai số (%)	Dầm chia 3 phần tử (l=L/3=2(m))	Sai số (%)
ω_1	10.6744	10.6915	0.16	10.6907	0.15	10.6905	0.15
ω_2	42.1599	49.8423	18.22	43.6402	3.51	43.4558	3.07

Để làm rõ ảnh hưởng của số lượng phần tử trong cột, tác giả cũng tiến hành đánh giá theo 3 trường hợp: cột chỉ chia 1 phần tử (sơ đồ 4a), cột chia 2 phần tử ($l=L/2=3\text{(m)}$), cột chia 3 phần tử ($l=L/3=2\text{(m)}$), còn cấu kiện dầm chỉ chia 1 phần tử.

Kết quả khảo sát và so sánh được trình bày theo bảng 7.

Bảng 7. Ảnh hưởng của số lượng phần tử trong cột đến tần số dao động riêng

Tần số (s ⁻¹)	Theo (9)	Theo phương pháp PTHH					
		Cột chia 1 phần tử (SD 3a)	Sai số (%)	Cột chia 2 phần tử (l=L/2=3(m))	Sai số (%)	Cột chia 3 phần tử (l=L/3=2(m))	Sai số (%)
ω_1	10.6744	10.6915	0.16	10.6738	0.01	10.6724	0.02
ω_2	42.1599	49.8423	18.22	46.0556	9.24	45.9027	8.88

Từ kết quả bảng 7 và bảng 8, ta nhận thấy là nếu xét đến dao động riêng thứ 2 thì việc chỉ chia cột và dầm thành một phần tử là chưa đủ, sai số của ω_2 lớn (trên 18%). Ngoài ra ảnh hưởng của việc phân chia số lượng phần tử trong dầm và trong cột đến tần số dao động riêng là không giống nhau. Nếu xét đến ω_2 thì việc phân chia số lượng phần tử trong dầm hiệu quả hơn.

Tiến hành khảo sát việc phân chia số lượng phần tử cả trong cấu kiện cột và dầm, kết quả trình bày ở bảng 8.

Bảng 8. Ảnh hưởng của số lượng phần tử trong cột và trong dầm đến tần số dao động riêng

Tần số (s ⁻¹)	Theo (9)	Theo phương pháp PTHH					
		Cột & dầm chia 2 phần tử	Sai số (%)	Cột chia 3 phần tử, dầm chia 2 phần tử	Sai số (%)	Cột chia 2 phần tử, dầm chia 3 phần tử	Sai số (%)
ω_1	10.6744	10.6730	0.01	10.6729	0.01	10.6716	0.03
ω_2	42.1599	42.4816	0.76	41.9434	0.51	42.0086	0.36

Từ bảng 8 ta nhận thấy rằng khi phân chia cả cột và dầm từ 2 phần tử trở lên thì kết quả ω_1 và ω_2 xấp xỉ tốt với nghiệm giải tích (nhỏ hơn 1%). Khi số lượng phân chia phần tử trong cột và dầm không giống nhau thì kết quả có sự sai lệch, tuy nhiên là không đáng kể.

Nhận xét:

- Tần số dao động riêng của kết cấu phụ thuộc khá lớn vào việc phân chia số lượng phần tử khi sử dụng phương pháp PTHH.

- Đối với kết cấu dầm đơn giản và dầm liên tục thì chiều dài của nhịp dầm không ảnh hưởng đến mức độ sai số của kết quả tần số dao động riêng cơ bản ω_1, ω_2 so với kết quả tính theo giải tích, tần số cơ bản bậc cao thì xu hướng sai số lớn hơn tần số cơ bản bậc thấp hơn. Nếu mỗi nhịp dầm chỉ chia 1 phần tử thì kết quả tính ω_1, ω_2 sai số là khá lớn, trên 11%. Khi chia mỗi nhịp dầm từ 2 đến 3 phần tử thì kết quả tính ω_1, ω_2 xấp xỉ tốt với nghiệm giải tích, sai số dưới 1.0%.

- Đối với kết cấu khung, nếu chỉ xét tần số cơ bản thứ nhất ω_1 thì chỉ cần phân chia mỗi cấu kiện dầm, cột thành mỗi phần tử là đủ, với mức sai số không đáng kể là dưới 0.2%. Tuy nhiên khi cần xét đến các tần số riêng bậc cao hơn, từ ω_2 trở lên thì sai số là khá lớn, trên 50%.

4. Kết luận

Phương pháp PTHH giúp giải quyết các bài toán động lực học công trình hiệu quả nhờ sự phát triển của máy tính. Một trong những đặc trưng động lực cần được quan tâm đúng mức là tần số dao động (hoặc chu kỳ dao động). Việc xác định tần số dao động riêng cơ bản của công trình là một bước quan trọng làm tiền đề cho các tính toán sau này. Khi sử dụng PTHH thì việc phân chia số lượng phần tử trong mỗi nhịp cấu kiện ảnh hưởng lớn đến sai số của tần số dao động riêng. Đối với kết cấu dầm có trọng lượng phân bố đều thì nên chia mỗi nhịp dầm thành 2 phần tử trở lên khi khảo sát đến tần số cơ bản ω_2 . Đối với kết cấu khung, nếu chỉ xét tần số cơ bản đầu tiên

ω_1 thì việc chia mỗi cấu kiện dầm, cột thành mỗi phần tử là chấp nhận được, tuy nhiên khi quan tâm đến các tần số riêng bậc cao hơn thì phải chia mỗi cấu kiện từ 2 đến 3 phần tử trở lên mới đảm bảo mức độ sai số dưới 1% so với kết quả theo giải tích.

Tài liệu tham khảo

- [1] Lê Công Duy, Đặng Hồng Long. “Phân tích dao động khung phẳng chịu tải trọng cưỡng bức theo phương pháp phần tử hữu hạn khoảng”. Tạp chí Xây dựng, 11/2015(171), ISSN 0866-0762, Bộ Xây dựng, trang 49-52.
- [2] Nguyễn Văn Phương. Động lực học công trình. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2005.
- [3] Nguyễn Tiến Khiêm. Cơ sở động lực học công trình. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.
- [4] Phạm Đình Ba, Nguyễn Tài Trung. Động lực học công trình. NXB Xây dựng, Hà Nội, 2005.
- [5] Anil K.Chopra. Dynamics Of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 1969.
- [6] Clough R.W. Dynamic of structures, 1993.
- [7] Timoshenko, S.Young, Weaver. Vibration Problems in Engineering, 1974.