

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG CỦA KHUNG PHẪNG CHỊU TẢI TRỌNG CƯỖNG BỨC THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN KHOẢNG (ANALYZING DYNAMIC OF PLANE FRAME STRUCTURE UNDER FORCED LOAD BY INTERVAL FINITE ELEMENT METHOD)

TS. Lê Công Duy

ThS. Đặng Hồng Long

Khoa xây dựng - Trường Đại học Duy Tân

Tóm tắt: Bài báo trình bày một thuật toán giải bài toán dao động cho kết cấu bằng phương pháp phần tử hữu hạn trong trường hợp có tham số đầu vào không chắc chắn dạng số khoảng. Phép tính “tối ưu hàm số khoảng” được tác giả sử dụng lồng ghép vào phương pháp giải lặp Newmark để đưa ra thuật giải phương trình vi phân dao động của kết cấu có tham số khoảng. Thuật giải được lập trình tính toán trên phần mềm Maple theo từng bước thời gian trong miền thời gian khảo sát dao động của kết cấu. Một ví dụ áp dụng cho bài toán dao động của khung phẳng mà các phần tử thanh có khối lượng phân bố đều, chịu tải trọng động dạng điều hòa trong trường hợp xét đến một số yếu tố đầu vào là đặc trưng vật liệu E , tải trọng, và tỷ số cản ξ dưới dạng các tham số khoảng.

Abstract: This paper presents a method of analyzing dynamic of structure by Finite element method (FEM) with interval parameter inputs. “Optimum interval function method” is used and combined with Newmark-method in order to solve the equation of dynamic . Algorithm is set up in Maple following step time. A numerical example is presented to demonstrate possible application of algorithm in which the weight of frame element is distributed uniformly per unit length of element, the forced harmonic load with parameter inputs like that material property, load, damping ratio in interval numbers.

Key words: Interval numbers, Interval analysis, Dynamic of structures with interval parameters, Dynamic of structures with uncertain parameters, Structural system.

1. Đặt vấn đề

Dao động công trình là một vấn đề đã được nghiên cứu từ lâu trên thế giới. Ở nước ta, tốc độ đô thị hóa diễn ra nhanh chóng kéo theo sự ra đời của nhiều công trình cao tầng. Vấn đề nghiên cứu dao động công trình đã và đang được quan tâm ở trong và ngoài nước [5],[6],[7],[8]. Có nhiều phương pháp để phân tích dao động, các phương pháp chính xác về cơ bản là tìm cách giải phương trình vi phân dao động dưới dạng giải tích, tuy nhiên việc sử dụng phương pháp giải tích thường gặp một số khó khăn khi bậc tự do của hệ lớn. Trong thực tế các phương pháp tính gần đúng theo phương pháp số đã được nghiên cứu phát triển và sử dụng có hiệu quả khi cho kết quả với độ chính xác đủ đáp ứng yêu cầu thiết kế, đồng thời tận dụng được khả năng tính toán của máy tính. Trong bài báo này, phương trình vi phân dao động của kết cấu có Ma trận khối lượng $[M]$ và ma trận độ cứng $[K]$ được thiết lập theo phương pháp phần tử hữu hạn, ma trận cản $[C]$ được tổ hợp tuyến tính theo ma trận độ cứng $[K]$ và ma trận khối lượng $[M]$ theo công thức của Rayleigh [6],[9]. Việc giải phương trình vi phân dao động của kết cấu được tác giả đề xuất bằng cách sử dụng Phép tính “tối ưu hàm số khoảng” [2] lồng ghép vào phương pháp giải lặp Newmark để đưa ra thuật giải phương trình vi

phân dao động của kết cấu có tham số khoảng. Thuật giải được lập trình tính toán trên phần mềm Maple theo từng bước thời gian trong miền thời gian khảo sát dao động của kết cấu. Một ví dụ áp dụng cho bài toán dao động của khung phẳng mà các phần tử thanh có khối lượng phân bố đều, chịu tải trọng động dạng điều hòa trong trường hợp xét đến một số yếu tố đầu vào là đặc trưng vật liệu E, tải trọng, và tỷ số cản ξ dưới dạng các tham số khoảng. Trình tự các bước và sơ đồ thuật toán được trình bày chi tiết trong mục 3 bên dưới.

2. Phương trình cơ bản của phương pháp PTHH khoảng phân tích dao động cưỡng bức

Theo nguyên lý công khả dĩ, mở rộng một cách tự nhiên phương trình vi phân dao động của kết cấu theo phương pháp PTHH [4],[6],[7],[9], ta có phương trình vi phân dao động của kết cấu theo phương pháp PTHH có tham số khoảng như sau:

$$[\tilde{M}]\{\ddot{u}\} + [\tilde{C}]\{\dot{u}\} + [\tilde{K}]\{u\} = \{\tilde{P}_0\}\sin\check{r}t \quad (1)$$

Trong đó:

- $[\tilde{K}]$, $[\tilde{M}]$ lần lượt là ma trận độ cứng, ma trận khối lượng tổng thể của hệ kết cấu, có dạng ma trận vuông kích thước $(n \times n)$ tùy thuộc vào số bậc tự do của tất cả các nút. Đối với kết cấu khung phẳng, ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phần tử thanh có liên kết cứng hai đầu trong hệ tọa độ địa phương chứa tham số khoảng như sau [2]:

$$[\tilde{k}_{e'}] = \begin{bmatrix} \check{E}\check{A}/\check{l} & 0 & 0 & -\check{E}\check{A}/\check{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\check{E}\check{I}/\check{l}^3 & 6\check{E}\check{I}/\check{l}^2 & 0 & -12\check{E}\check{I}/\check{l}^3 & 6\check{E}\check{I}/\check{l}^2 \\ 0 & 6\check{E}\check{I}/\check{l}^2 & 4\check{E}\check{I}/\check{l} & 0 & -6\check{E}\check{I}/\check{l}^2 & 2\check{E}\check{I}/\check{l} \\ -\check{E}\check{A}/\check{l} & 0 & 0 & \check{E}\check{A}/\check{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\check{E}\check{I}/\check{l}^3 & -6\check{E}\check{I}/\check{l}^2 & 0 & 12\check{E}\check{I}/\check{l}^3 & -6\check{E}\check{I}/\check{l}^2 \\ 0 & 6\check{E}\check{I}/\check{l}^2 & 2\check{E}\check{I}/\check{l} & 0 & -6\check{E}\check{I}/\check{l}^2 & 4\check{E}\check{I}/\check{l} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[\tilde{m}_{e'}] = \begin{bmatrix} 2\check{a} & 0 & 0 & \check{a} & 0 & 0 \\ 0 & 156\check{b} & 22\check{l}\check{b} & 0 & 54\check{b} & -13\check{l}\check{b} \\ 0 & 22\check{l}\check{b} & 4\check{l}^2\check{b} & 0 & 13\check{l}\check{b} & -3\check{l}^2\check{b} \\ \check{a} & 0 & 0 & 2\check{a} & 0 & 0 \\ 0 & 54\check{b} & 13\check{l}\check{b} & 0 & 156\check{b} & -22\check{l}\check{b} \\ 0 & -13\check{l}\check{b} & -3\check{l}^2\check{b} & 0 & -22\check{l}\check{b} & 4\check{l}^2\check{b} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Với ký hiệu:

$$\check{a} = \frac{\check{\rho}\check{l}\check{A}}{6}; \check{b} = \frac{\check{\rho}\check{l}\check{A}}{420}$$

- \check{E} , \check{A} , \check{I} , \check{l} , $\check{\rho}$ lần lượt là các đại lượng Modun đàn hồi, tiết diện ngang, momen quán tính của tiết diện, chiều dài phần tử và khối lượng phân bố theo chiều dài dưới dạng số khoảng.

Các ma trận $[\tilde{M}]$ và $[\tilde{K}]$ trong hệ tọa độ tổng thể của kết cấu được ghép nối từ các ma trận của các phần tử thông qua tọa độ của các nút. Muốn vậy phải quy đổi các ma trận khối lượng phần tử $[\tilde{m}_{e'}]$, ma trận độ cứng phần tử $[\tilde{k}_{e'}]$ trong hệ tọa độ địa phương về hệ tọa độ tổng thể tương ứng là $[\tilde{m}_e]$ và $[\tilde{k}_e]$ theo công thức:

$$[\tilde{m}_e] = [T]_e^T \cdot [\tilde{m}_{e'}] \cdot [T]; [\tilde{k}_e] = [T]_e^T \cdot [\tilde{k}_{e'}] \cdot [T]$$

Trong đó: $[T]_e$ là ma trận chuyển đổi tọa độ của từng phần tử, và có cấu trúc như sau:

$$[T]_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Với α là góc lượng giác của phần tử thanh thứ e so với phương nằm ngang.

- $[C]$ là ma trận cản tổng thể của hệ kết cấu được tính bằng cách tổ hợp tuyến tính của ma trận khối lượng tổng thể $[\tilde{M}]$ và ma trận độ cứng tổng thể $[\tilde{K}]$ theo đề nghị của Rayleigh:

$$[C] = \alpha[\tilde{M}] + \beta[\tilde{K}] \quad (4)$$

Với các hệ số α và β được xác định thông qua 2 tần số dao động riêng tự do ω_1, ω_2 và tỷ số cản kết cấu ξ_1, ξ_2 tương ứng:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\omega_2 \cdot \xi_1 - \omega_1 \cdot \xi_2) \\ \beta = \frac{2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\omega_2 \cdot \xi_2 - \omega_1 \cdot \xi_1) \end{cases} \quad (5)$$

- Véc tơ lực kích thích tổng thể của hệ sẽ có dạng $\{\check{P}_{01}; \check{P}_{02}; \dots \check{P}_{0n}\}^T \sin \check{r}t$.

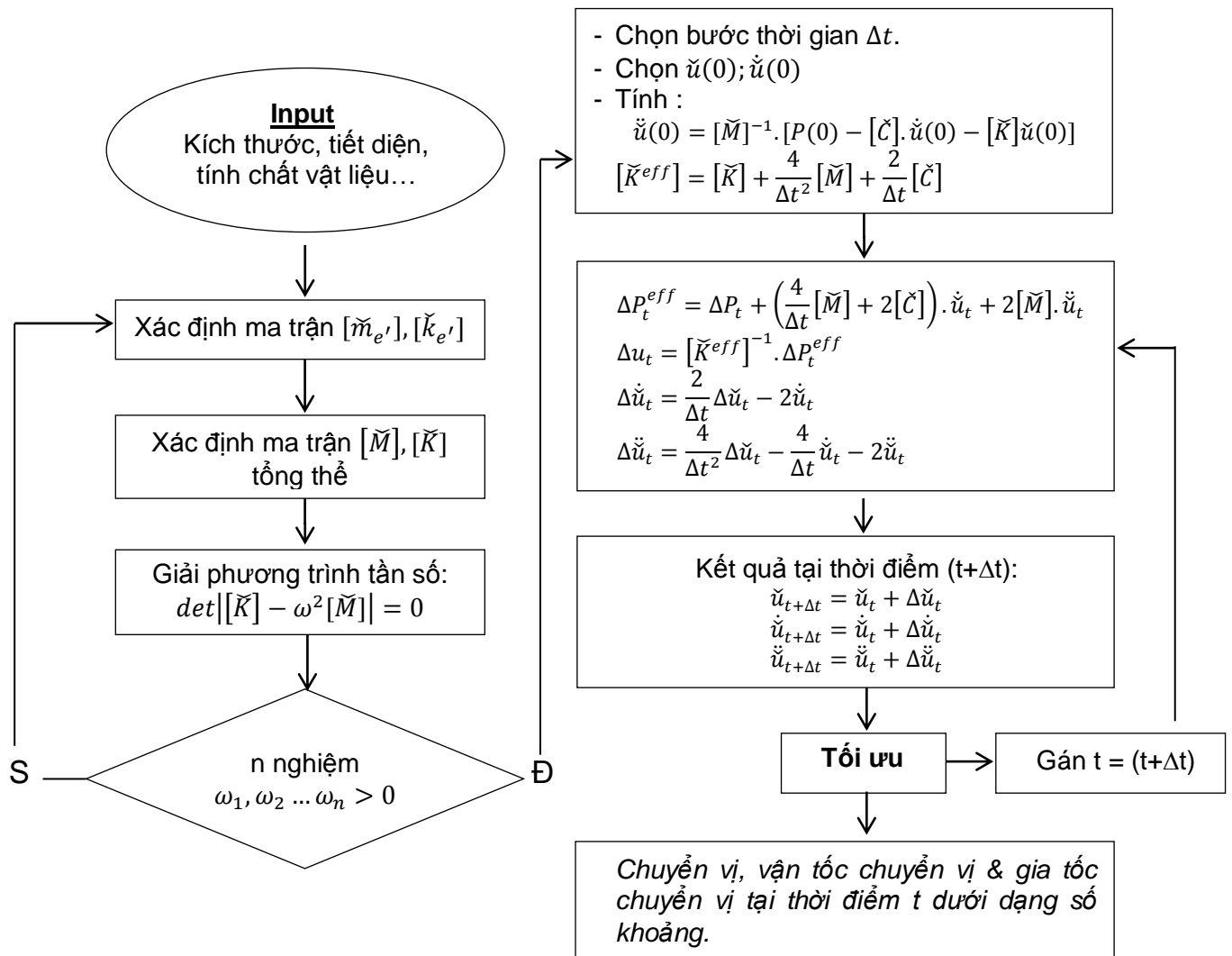
3. Một cách giải phương trình dao động bằng phương pháp PTHH khoảng

Có nhiều phương pháp giải phương trình vi phân (1) để tìm nghiệm là chuyển vị tại các nút, trong bài báo này tác giả sử dụng phương pháp Newmark (Newmark – method) kết hợp với phép toán “tối ưu khoảng” [2] để đưa ra cách giải phương trình vi phân dao động theo phương pháp PTHH khoảng với trình tự các bước sau:

- Xác định ma trận độ cứng tổng thể $[\tilde{K}]$.
- Xác định ma trận khối lượng tổng thể $[\tilde{M}]$.
- Giải phương trình tần số: $\det|[\tilde{K}] - \omega^2 \cdot [\tilde{M}]| = 0$
- Xác định các hệ số α, β theo (5).
- Xác định ma trận cản tổng thể $[C]$ theo (4).
- Khử suy biến ma trận $[\tilde{M}]$, $[\tilde{K}]$, $[C]$ bằng cách bỏ đi các hàng và cột có thành phần chuyển vị bằng 0.
- Sử dụng phương pháp Newmark để đưa hệ phương trình (1) về dạng các phương trình đại số.
- Tối ưu chuyển vị đầu ra tại các nút trong từng thời điểm Δt , sử dụng kết quả để làm đầu vào cho bước thời gian tiếp theo.

Do thông số đầu vào chứa các đại lượng không chắc chắn dưới dạng số khoảng nên kết quả đầu ra phải ở dưới dạng số khoảng $[a, b]$. Để giải quyết vấn đề này, tác giả xem chuyển vị đầu ra như một hàm theo các thông số đầu vào, $u_{t+\Delta t} = f(u_t; \dot{u}_t; \ddot{u}_t)$. Tối ưu hàm số $f \rightarrow (min, max)$ [2], lúc đó chuyển vị đầu ra sẽ ở dưới dạng số khoảng $min \leq u_{t+\Delta t} \leq max$. Các bước tính toán tối ưu và tính lặp để tìm chuyển vị trong từng khoảng chia Δt được tác giả lập trình và thực hiện trên phần mềm Maple.

Sơ đồ thuật toán:



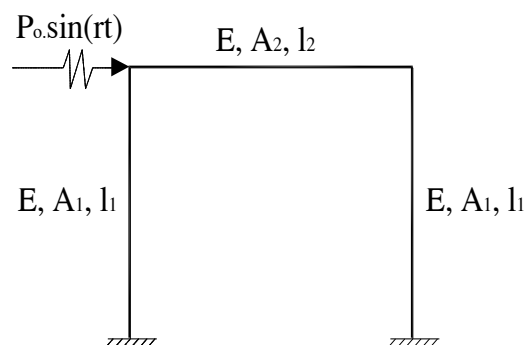
Hình 1. Sơ đồ thuật toán phân tích dao động theo phương pháp PTHH khoảng.

4. Ví dụ minh họa

4.1. Số liệu đầu vào

Cho hệ kết cấu là khung ngang 1 tầng 1 nhịp như hình 2, chịu tải trọng động dạng điều hòa $P_0 \sin(rt)$, thông số đầu vào dưới dạng số khoảng như sau:

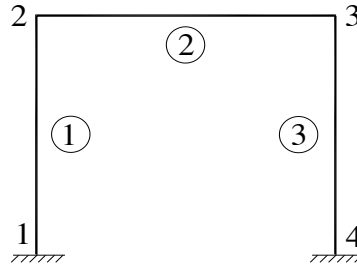
$$\begin{aligned} \check{E} &= [26,46 ; 27,46] \times 10^6 \text{ (kN/m}^2\text{)}, \\ A_1 &= 20 \times 20 \text{ (cm}^2\text{)}, A_2 = 25 \times 40 \text{ (cm}^2\text{)}, \\ l_1 &= 3,6 \text{ (m)}, l_2 = 5 \text{ (m)}, \\ \check{P}_0 &= [20; 30] \text{ (kN)}, \\ r &= 18 \text{ (s}^{-1}\text{)}, \\ \check{\xi}_i &= [1; 10] \%, \\ \rho_1 &= 1 \text{ (kN/m)}, \rho_2 = 2,5 \text{ (kN/m)}. \end{aligned}$$



Hình 2. Mô hình khung ngang 1 tầng 1 nhịp

4.2 Trình tự tính toán

Chia hệ kết cấu thành 3 phần tử và đánh số thứ tự các nút như hình 3:



Hình 3. Sơ đồ phần tử kết cấu

a. Bảng ghi số phần tử và số nút của hệ

Bảng 1. Số phần tử và số nút

Phần tử	Số chuyển vị nút	
1	1	2
2	2	3
3	3	4

b. Lập ma trận độ cứng, ma trận khối lượng phần tử: Sử dụng công thức (2),(3) cho phần tử thanh liên kết hai đầu ngàm để xác định ma trận độ cứng và ma trận khối lượng phần tử trong hệ tọa độ địa phương. Sau đó chuyển về ma trận tổng thể của từng phần tử theo quan hệ :

$$[\check{m}_e] = [T]_e^T \cdot [\check{m}_{e'}] \cdot [T]; [\check{k}_e] = [T]_e^T \cdot [\check{k}_{e'}] \cdot [T]$$

c. Lập ma trận độ cứng, ma trận khối lượng tổng thể cho hệ: Theo phương pháp cộng độ cứng trực tiếp, ma trận độ cứng và ma trận khối lượng tổng thể là ma trận vuông, xác định dương và có kích thước là 12×12 .

d. Khử suy biến ma trận độ cứng và ma trận khối lượng tổng thể: Tại nút số 1 và số 4 là liên kết ngàm nên các thành phần chuyển vị bằng 0. Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng tổng thể sau khi khử suy biến như sau:

$$[\check{K}] = \begin{bmatrix} \frac{12\check{E}I_1}{l_1^3} + \frac{\check{E}A_2}{l_2} & 0 & \frac{6\check{E}I_1}{l_1^2} & -\frac{\check{E}A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\check{E}A_1}{l_1} + \frac{12\check{E}I_2}{l_2^3} & \frac{6\check{E}I_2}{l_2^2} & 0 & -\frac{12\check{E}I_2}{l_2^3} & \frac{6\check{E}I_2}{l_2^2} \\ \frac{6\check{E}I_1}{l_1^2} & \frac{6\check{E}I_2}{l_2^2} & \frac{4\check{E}A_1}{l_1} + \frac{4\check{E}I_2}{l_2} & 0 & -\frac{6\check{E}I_2}{l_2^2} & \frac{2\check{E}I_2}{l_2} \\ -\frac{\check{E}A_2}{l_2} & 0 & 0 & \frac{12\check{E}I_1}{l_1^3} + \frac{\check{E}A_2}{l_2} & 0 & \frac{6\check{E}I_1}{l_1^2} \\ 0 & -\frac{12\check{E}I_2}{l_2^3} & -\frac{6\check{E}I_2}{l_2^2} & 0 & \frac{\check{E}A_1}{l_1} + \frac{12\check{E}I_2}{l_2^3} & -\frac{\check{E}A_2}{l_2} \\ 0 & \frac{6\check{E}I_2}{l_2^2} & \frac{2\check{E}I_2}{l_2} & \frac{6\check{E}I_1}{l_1^2} & -\frac{\check{E}A_2}{l_2} & \frac{4\check{E}A_1}{l_1} + \frac{4\check{E}I_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

$$[\check{M}] = \begin{bmatrix} 156b_1 + 2a_2 & 0 & 22l_1b_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 + 156b_2 & 22l_2b_2 & 0 & 54b_2 & -13l_2b_2 \\ 22l_1b_1 & 22l_2b_2 & 4l_1^2b_1 + 4l_2^2b_2 & 0 & 13l_2b_2 & -3l_2^2b_2 \\ a_2 & 0 & 0 & 156b_1 + 2a_2 & 0 & 22l_1b_1 \\ 0 & 54b_2 & 13l_2b_2 & 0 & 2a_1 + 156b_2 & -22l_2b_2 \\ 0 & -13l_2b_2 & -3l_2^2b_2 & 22l_1b_1 & -22l_2b_2 & 4l_1^2b_1 + 4l_2^2b_2 \end{bmatrix}$$

Với :

$$I_1 = \frac{0.2 \times 0.2^3}{12} = \frac{1}{7500} (m^4); I_2 = \frac{0.25 \times 0.4^3}{12} = \frac{1}{750} (m^4);$$

$$a_1 = \frac{\rho_1 \cdot l_1 \cdot A_1}{6} = 0.024 (kN \cdot m^2); a_2 = \frac{\rho_2 \cdot l_2 \cdot A_2}{6} = \frac{5}{24} (kN \cdot m^2);$$

$$b_1 = \frac{\rho_1 \cdot l_1 \cdot A_1}{420} = \frac{3}{8750} (kN \cdot m^2); b_2 = \frac{\rho_2 \cdot l_2 \cdot A_2}{420} = \frac{1}{336} (kN \cdot m^2);$$

e. Giải phương trình tần số $\det[[\tilde{K}] - \omega^2 \cdot [\tilde{M}]] = 0$: Xác định được 6 tần số dao động riêng theo thứ tự tăng dần như sau:

$$\omega_1 \approx 0,00688423\sqrt{\tilde{E}}(s^{-1}); \omega_2 \approx 0,0345745\sqrt{\tilde{E}}(s^{-1}); \omega_3 \approx 0,124117\sqrt{\tilde{E}}(s^{-1});$$

$$\omega_4 \approx 0,261923\sqrt{\tilde{E}}(s^{-1}); \omega_5 \approx 0,299047\sqrt{\tilde{E}}(s^{-1}); \omega_6 \approx 0,3975464\sqrt{\tilde{E}}(s^{-1});$$

f. Xác định các hệ α, β với giả thiết $\xi_1 = \xi_2 = \xi = [1; 10]\%$

g. Xác định vec tơ tải trọng (đã khử suy biến): $\{\check{f}\} = \{\check{P}_0 \cdot \sin(rt), 0, 0, 0, 0, 0\}^T$

h. Lập Newmark để giải hệ phương trình (1):

- Chọn bước thời gian $\Delta t = 0,015(s)$.

- Giả thiết tại thời điểm $t = 0$ chuyển vị và vận tốc của hệ bằng 0.

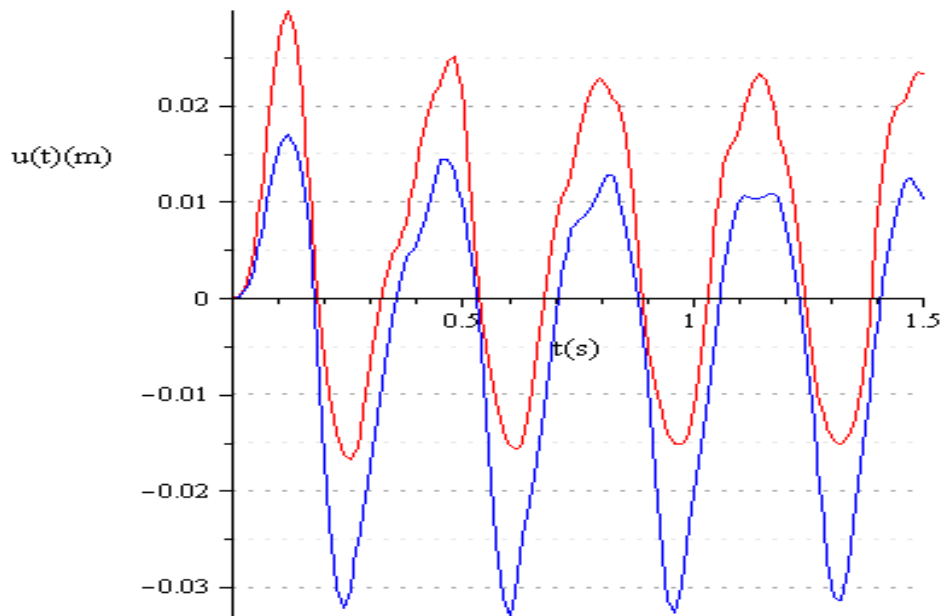
Kết quả chuyển vị tại các thời điểm theo phương pháp PTHH khoảng được thể hiện ở bảng 2 và 3.

Bảng 2. Chuyển vị ngang tại nút số 2 (đ/v mm)

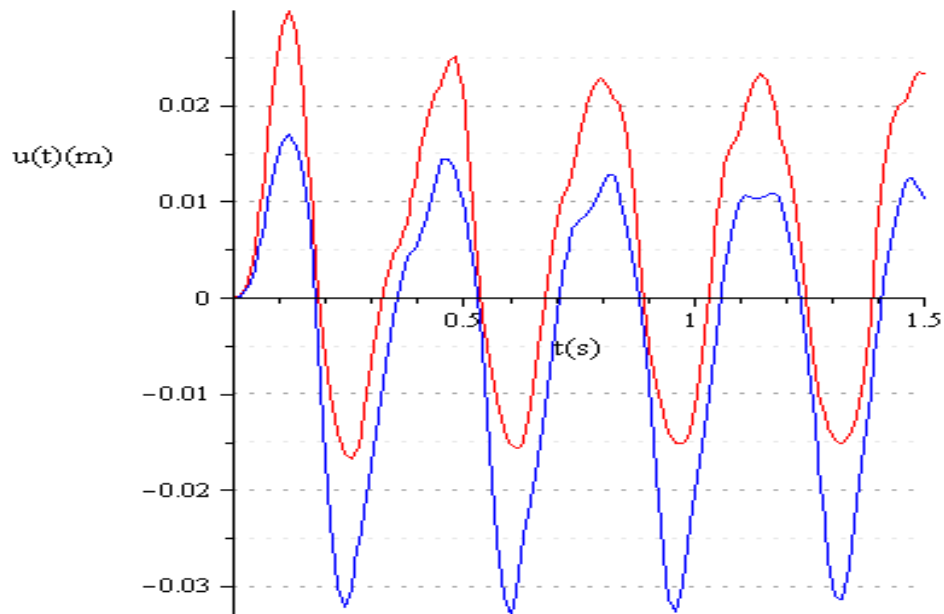
t (s)	0	1Δt	2Δt	3Δt	4Δt	5Δt	6Δt	7Δt	8Δt	9Δt	10Δt	...
u_{max}	0	0,312	1,755	5,065	10,313	16,821	23,298	28,150	29,896	27,571	21,031	...
x		9	9	7	6	6	6	2	4	1		
u_{min}	0	0.198	1,100	3,119	6,2341	9,9859	13,611	16,247	17,165	15,940	12,587	...
n		9	7	8			6	9	2	5	8	

Bảng 3. Chuyển vị ngang tại nút số 3 (đ/v mm)

t (s)	0	1Δt	2Δt	3Δt	4Δt	5Δt	6Δt	7Δt	8Δt	9Δt	10Δt	...
u_{max}	0	0,305	1,741	5,045	10,288	16,794	23,270	28,123	29,872	27,552	21,000	...
x		5	3	3	5	3	1	5	6	9	6	
u_{min}	0	0,194	1,091	3,106	6,2180	9,9683	13,593	16,230	17,147	15,928	12,579	...
n		6	4	9			3	6	2	5	7	



Hình 4. Đồ thị chuyển vị ngang tại nút 2 theo thời gian.



Hình 5. Đồ thị chuyển vị ngang tại nút 3 theo thời gian.

Nhận xét: Từ kết quả tính toán trong bảng 2 và bảng 3 cho thấy giá trị chuyển vị ngang tại nút 3 luôn bé hơn tại nút 2 với mức sai lệch tối đa không quá 2,0%. Do đó, thực tế khi tính toán thiết kế công trình giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục để đơn giản trong tính toán là chấp nhận được.

5. Kết luận

Bài báo đã trình bày khá chi tiết một thuật toán giải bài toán dao động cho kết cấu bằng phương pháp phần tử hữu hạn trong trường hợp có tham số đầu vào không chắc chắn dạng số khoảng. Tác giả đã sử dụng phép tính “tối ưu hàm số khoảng” lồng ghép vào phương pháp giải lặp Newmark để đưa ra thuật giải phương trình vi phân dao động của kết cấu có tham số khoảng. Thuật giải được lập trình tính toán trên phần mềm Maple khá công phu theo từng bước thời gian trong miền khảo sát dao động của kết cấu. Tuy nhiên, ví dụ tính toán chỉ mang

tính minh họa cho thuật giải vì có số bậc tự do của kết cấu chưa lớn, hướng nghiên cứu tiếp theo nhóm tác giả sẽ xây dựng thuật toán phân tích dao động cho kết cấu khung phẳng và khung không gian nhiều tầng nhiều nhịp xác định phản ứng đầu ra của kết cấu làm cơ sở để tính toán đánh giá độ tin cậy cho kết cấu.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Lê Xuân Huỳnh, Lê Công Duy, *Dao động của kết cấu khung trong trường hợp có tham số không chắc chắn*, Tạp chí Kết Cấu Xây dựng Hà Nội – No.8. 2012.
- [2]. Lê Công Duy, Đặng Hồng Long, *Một cách giải hệ phương trình cơ bản của phương pháp PTHH khi có tham số đầu vào dạng khoảng*, Tạp chí Khoa học Công nghệ xây dựng, số 03/2014.
- [3]. Nguyễn Lê Ninh, *Động Đất Và Thiết Kế Công Trình Chịu Động Đất*. Nhà Xuất Bản Xây Dựng, Hà Nội - 2007.
- [4]. Nguyễn Văn Phượng, *Động Lực Học Công Trình*. Nhà Xuất Bản Khoa học & Kỹ thuật, Hà Nội - 2005.
- [5]. D.Vandepitte, W. Teichert, *Application of The Fuzzy Finite Element Method in Structural Dynamics*, Department of Mechanical Engineering, Division PMA, K.U.Leuven, Belgium, 2004.
- [6]. Petr Stemberk, Jaroslav Kruis, *Dynamic structural analysis of 2D wit Fuzzy coefficients*, Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University, 2004.
- [7]. Mehdi Modarres ZaDeh, *Dynamic Analysis of Structures With Interval Uncertainty*, Department of Civil Engineering, Case Western Reserve University, August-2005.
- [8]. Bend Moller, Wolfgang Graf, Michael Beer, *Safety Assessment of Structure in View of Fuzzy Randomness*. Institute of Structural Analysis, Dresden University of Technology, Dresden Germany, 2003.
- [9]. Anil K. Chopra, *Dynamics Of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, University Of California at Berkeley-Prentice Hall 07458, 1969.