MỘT THUẬT TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN CÓ THAM SỐ KHOẢNG

TS. **LÊ CÔNG DUY**
KS. **ĐẶNG HỒNG LONG**
Trường Đại học Duy Tân

Tóm tắt: *Bài báo trình bày một thuật toán được đề xuất để giải phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị có tham số khoảng. Thuật toán được xây dựng dựa trên các phép toán cơ bản của số học khoảng và phương pháp tối ưu khoảng. Một ví dụ số áp dụng tính kết cấu thanh có các tham số khoảng là môđun đàn hồi vật liệu, kích thước hình học và tải trọng tĩnh. Kết quả tính chuyển vị nút và lực dọc trong thanh của hệ kết cấu là các số khoảng được so sánh với kết quả tính theo phương pháp PTHH khoảng - mô hình EBE (Element by element) được trích dẫn trong tài liệu [2].*

1. Đặt vấn đề

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) trong phân tích kết cấu có các tham số đầu vào dưới dạng các đại lượng khoảng, bắt nguồn từ việc nghi ngờ về độ tin cậy của các mô hình xác suất, các dữ liệu đầu vào không rõ ràng, không chắc chắn. Lúc này phương trình cơ bản của phương pháp PTHH [k]{q} = {f}, ma trận độ cứng [k] và véc tơ tải trọng {f} sẽ chứa các tham số đầu vào dưới dạng đại lượng khoảng bị chặn dưới và chặn trên nhưng không gắn với một cấu trúc xác suất nào, và kết quả chuyển vị tìm được {q} cũng dưới dạng số khoảng.

Việc nghiên cứu và tính toán kết cấu có các yếu tố đầu vào không rõ ràng, không chắc chắn dưới dạng các đại lượng khoảng đang được quan tâm và nghiên cứu cả trong và ngoài nước. Đã có một số công trình nghiên cứu giải quyết bài toán dựa trên phương pháp PTHH khoảng – mô hình EBE áp dụng phương pháp hàm phạt [2], [3], [6]. Theo [2], mô hình kết cấu sẽ được tách rời thành các phần tử độc lập để tránh sự mở rộng "tự nhiên" của số học khoảng trong quá trình ghép ma trận độ cứng các phần tử, đồng thời xử lý các ràng buộc (sự tương thích chuyển vị các nút) bằng phương pháp hàm phạt. Phương pháp tính toán này đặt ra vấn đề khó khăn là việc giải quyết khối lượng công việc khá lớn do số lượng nút lớn hơn nhiều so với phương pháp PTHH thông thường và việc lựa chọn số phạt η dựa nhiều vào kinh nghiệm, dẫn đến kết quả theo phương pháp tính có sai khác đáng kể với nghiệm giải tích. Bài báo này đề xuất một phương pháp khác *"Phương pháp-Tối ưu khoảng"* để giải phương trình cơ bản của phương pháp PTHH theo mô hình chuyển vị trong trường hợp có một số tham số đầu vào dưới dạng đại lượng khoảng như mô đun đàn hồi, tải trọng tĩnh và kích thước hình học. Xuất phát từ các phép toán cơ bản của số học khoảng và phương pháp tối ưu, bài báo trình bày thuật toán và ứng dụng giải quyết bài toán đã được trích dẫn trong [2] để so sánh kết quả.

2. Phương trình cơ bản của phương pháp PTHH có tham số khoảng

Theo nguyên lý công khả dĩ, thiết lập phương trình cơ bản của phương pháp PTHH có tham số đầu vào dưới dạng số khoảng như sau:

$$[\breve{k}].\{\breve{q}\} = \{\breve{f}\} \qquad (1)$$

trong đó:

- $[\breve{k}]$ là ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu, là một ma trận vuông có kích thước (nxn) tùy thuộc vào số bậc tự do của tất cả các nút. Để minh họa cho việc trình bày thuật toán, không làm mất tính tổng quát, ta thực hiện tính toán với kết cấu xét trong mặt phẳng bằng cách rời rạc hóa kết cấu thành các phần tử thành sáu bậc tự do có ma trận độ cứng chứa tham số khoảng:

$$[\breve{k}_e] = \begin{bmatrix} \breve{E}\breve{A}/\breve{l} & 0 & 0 & \breve{E}\breve{A}/\breve{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^3 & 6\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^2 & 0 & -12\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^3 & 6\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^2 \\ 0 & 6\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^2 & 4\breve{E}\breve{I}/\breve{l} & 0 & -6\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^2 & 2\breve{E}\breve{I}/\breve{l} \\ -\breve{E}\breve{A}/\breve{l} & 0 & 0 & \breve{E}\breve{A}/\breve{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^3 & -6\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^2 & 0 & 12\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^3 & -6\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^2 \\ 0 & 6\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^2 & 2\breve{E}\breve{I}/\breve{l} & 0 & -6\breve{E}\breve{I}/\breve{l}^2 & 4\breve{E}\breve{I}/\breve{l} \end{bmatrix}$$

Trong trường hợp phần tử thanh chịu kéo, nén có chuyển vị nút theo 2 phương trong mặt phẳng, thì ma trận độ cứng phần tử đưa về dạng đơn giản hơn và sẽ được sử dụng để minh họa cho các ví dụ trong mục 4:

$$[\breve{k}_e] = \frac{\breve{A}\breve{E}}{\breve{l}}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

trong đó: *c*, *s* - các cos*α* và sin*α* , với *α* là góc lượng giác của phần tử thanh thứ e so với phương ngang.

Nếu phần tử thanh chịu kéo, nén chỉ có chuyển vị theo phương dọc trục (thanh phẳng một chiều) thì ma trận độ cứng phần tử có dạng:

$$[\breve{k}_e]=\begin{bmatrix} \breve{E}\breve{A}/\breve{l} & -\breve{E}\breve{A}/\breve{l} \\ -\breve{E}\breve{A}/\breve{l} & \breve{E}\breve{A}/\breve{l} \end{bmatrix}$$

với: $\breve{E}, \breve{A}, \breve{I}, \breve{l}$ lần lượt là các đại lượng khoảng modun đàn hồi, tiết diện ngang, mômen quán tính và chiều dài của phần tử thanh;

- $\{\breve{f}\}$ - véc tơ lực nút tổng thể (bao gồm lực tập trung đặt tại nút và lực trên thanh quy về nút) dưới dạng số khoảng, kích thước (nx1);

- $\{\breve{q}\}$ - véc tơ chuyển vị nút trong hệ kết cấu, với mỗi thành phần của véc tơ là các chuyển vị nút thành phần được xác định bằng cách giải phương trình (1);

Chuyển vị tìm được có các thành phần cũng chứa tham số khoảng có kích thước tương ứng (nx1) dưới dạng: $\{\breve{q}\} = \{\breve{q}_1\,\breve{q}_2 ... \breve{q}_n\}^T$

3. Một cách giải phương trình cơ bản của phương pháp PTHH có tham số khoảng

3.1. Cơ sở lý thuyết số học khoảng

Một khoảng thực là một tập hợp không rỗng của các số thực:

$$x = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in R \,|\, \underline{x} \le x \le \overline{x}\}$$

trong đó: $\underline{x}$ và $\overline{x}$ là cận dưới và cận trên của khoảng; $\breve{x}$, x là một phần trong khoảng $\breve{x}$, R là tập số thực.

Bốn phép tính cơ bản của số thực là (+,-,×,÷) có thể mở rộng cho các số khoảng. Một phép tính bất kỳ $o \in$(+,-,×,÷) trên các khoảng được định nghĩa như sau:

$$\breve{x}\ o\ \breve{y} = \{x\ o\ y | x \in \breve{x}, y \in \breve{y}\}$$

Tập hợp các kết quả của phép toán đối với $x \in \breve{x}$ và $y \in \breve{y}$ tạo thành một khoảng đóng (nếu 0 không nằm dưới mẫu số) với các cận của các khoảng được xác định như sau:

$$\breve{x}\ o\ \breve{y} = [min(x\,o\,y), max(x\,o\,y)] \text{ với } o \in (+,-,\times,\div).$$

Cận dưới và cận trên của phép toán $\breve{x}\ o\ \breve{y}$ được xác định từ bốn cặp số $\underline{x}\,o\,\underline{y}$, $\underline{x}\,o\,\overline{y}$, $\overline{x}\,o\,\underline{y}$, $\overline{x}\,o\,\overline{y}$

Hàm số khoảng là một hàm có giá trị khoảng của một hoặc nhiều tham số khoảng, do đó hàm số khoảng là ánh xạ giá trị của một hoặc nhiều tham số khoảng lên một khoảng. Đối với một hàm số *f(x₁,…,xₙ)*, nếu hàm giá trị khoảng $\breve{f}(\breve{x}_1, ..., \breve{x}_n)$ có tính chất $\breve{f}(\breve{x}_1, ..., \breve{x}_n)$ =*f* $(x_1,…,x_n)$ với mọi đối số *x* thì hàm số $\breve{f}$ được gọi là hàm mở rộng khoảng của *f*, đặc biệt hàm mở rộng khoảng tự nhiên của *f* có thể nhận được bằng cách thay thế mỗi biến số thực x_i bằng một biến khoảng $\breve{x}_j$ và mỗi phép toán thực (+,-,×,÷) bằng các phép toán khoảng tương ứng. Nếu hàm số $\breve{f}$ là một biểu thức có một số hữu hạn các biến khoảng $(\breve{x}_1, ..., \breve{x}_n)$ và các phép tính khoảng (+,-,×,÷) thì hàm này thõa mãn tính chất bao hàm cơ bản là [3, 4]:

Nếu $\breve{x}_1 \subseteq \breve{y}_1, ..., \breve{x}_n \subseteq \breve{y}_n$ *thì* $\breve{f}(\breve{x}_1, ..., \breve{x}_n) \subseteq \breve{f}(\breve{y}_1, ..., \breve{y}_n)$.

Trong đó ký hiệu $\breve{x} \subseteq \breve{y}$ có nghĩa là khoảng $\breve{x}$ là con khoảng $\breve{y}$, khi và chỉ khi $\underline{y} \le \underline{x}$ và $\overline{x} \le \overline{y}$.

Trong nhiều trường hợp, những biến giá trị được xác định bởi số học khoảng có xu hướng mở rộng so với biến của khoảng giá trị thực nên làm cho kết quả không chính xác.

Chẳng hạn, xét biểu thức đại số f = $x_1.x_2/x_3$ với $x_1 = x_2 = x_3 \in$[2, 5], bằng cách đánh giá hàm mở khoảng rộng tự nhiên, ta nhận được giá trị của hàm f trên khoảng [2, 5] là:

$$\breve{f} = \breve{x}_1.\breve{x}_2 / \breve{x}_3 = [4, 25]/[2, 5]=[0.8, 12.5]$$

Tuy nhiên khi xét hàm số $\breve{f} = \breve{x}.\breve{x} / \breve{x}$, với x $\in$[2, 5], theo các phép toán cơ bản của số học khoảng thì hàm $\breve{f} = \breve{x}.\breve{x} / \breve{x}$ được tính toán lần lượt giống như hàm $\breve{f} = \breve{x}_1.\breve{x}_2 / \breve{x}_3$ và cho khoảng giá trị đầu ra của

$\breve{f}=\breve{x}.\breve{x}/\breve{x}$= [4,25]/[2,5]=[0.8, 12.5]. Trong khi đó, về mặt toán học cũng như ý nghĩa vật lý của đại lượng $\breve{x}$ thì hàm $\breve{f}=\breve{x}.\breve{x}/\breve{x}=\breve{x}^2/\breve{x}=\breve{x}$=[2,5]. Ta thấy $\breve{f}=\breve{x}_1.\breve{x}_2/\breve{x}_3$= [0.8, 12.5] bao hàm $\breve{f}=\breve{x}$ = [2,5].

Sự mở rộng khoảng không mong muốn này được gọi là *sự ước tính quá mức do bài toán phụ thuộc* hay đơn giản là *bài toán phụ thuộc* [2], [3]. Nguyên nhân là do trong số học khoảng các biến số xuất hiện trong các phép tính được xem là độc lập với nhau, đây là một điểm hạn chế khi áp dụng số học khoảng vào giải quyết các bài toán kết cấu khi mà các tham số đầu vào hay đầu ra bị ràng buộc rất chặt chẽ.

3.2. Phương pháp tối ưu khoảng

Phương pháp này được thực hiện dựa trên phương pháp tối ưu kết quả đầu ra khi các thông số đầu vào chứa tham số khoảng, lúc này thay vì sử dụng công cụ số học khoảng tính toán trực tiếp để tìm khoảng kết quả đầu ra, ta thực hiện tối ưu hàm mục tiêu để tìm ra các giá trị lớn nhất (maximum) và bé nhất (minximum) với các điều kiện ràng buộc là các biến số của hàm mục tiêu bị giới hạn trong khoảng của chúng.

$y_j = f_j(x_1, x_2,\dots x_n) \rightarrow$ min, với điều kiện $a_j \le x_j \le b_j$ (2)

$y_j = f_j(x_1, x_2,\dots x_n) \rightarrow$ max, với điều kiện $a_j \le x_j \le b_j$ (3)

Giải bài toán quy hoạch (2) và (3) ta được *giá trị lớn nhất và nhỏ nhất* của kết quả đầu ra. Ưu điểm của phương pháp này là kết quả đầu ra gần với kết quả giải tích do phương pháp không sử dụng số học khoảng khi thực hiện các phép tính nên không mắc phải việc mở rộng “tự nhiên” [3].

Ví dụ: xét hàm số khoảng $\breve{y}=\breve{x}_1^2+\breve{x}_2^2-3\breve{x}_1.\breve{x}_2+5$, trong đó $\breve{x}_1,\breve{x}_2$ là các biến số khoảng $\breve{x}_1\in$ [-2, 5]; $\breve{x}_2\in$ [2, 7], nếu thực hiện tuần tự các phép tính ta được như sau:

$\breve{x}_1^2$=[-10, 25]; $\breve{x}_2^2$=[4, 49]; $3\breve{x}_1.\breve{x}_2$=[-42, 105];

Do đó $\breve{y}$=[-10,25]+ [4,49] - [-42,105]+5 = [-111, 116].

Nếu thực hiện theo phương pháp tối ưu khoảng, hàm mục tiêu là:

$y=f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1.x_2 + 5$ với các điều kiện ràng buộc như sau: $-2\le x_1\le 5$; $2\le x_2\le 7$.

Thực hiện bài toán tối ưu phi tuyến bằng phần mềm Mapble 13 ta được kết quả như sau:

y_{max} = 100; y_{min} = -26 hay nói cách khác $\breve{y}=[-26,\ 100]$.

Kết quả theo phương pháp tối ưu hẹp hơn so với kết quả sử dụng các phép tính số học khoảng.

3.3. Một cách giải phương trình cơ bản của phương pháp PTHH có tham số khoảng

Ý tưởng thực hiện cách giải phương trình cơ bản của phương pháp PTHH có tham số khoảng là tìm cách xác định nghiệm đầu ra được biểu diễn bằng một hàm số giải tích phụ thuộc tất cả các tham số đầu vào dạng số khoảng. Sau đó sử dụng phép toán, tối ưu hàm nghiệm đầu ra dựa trên điều kiện ràng buộc của các biến đầu vào có giá trị nằm trong khoảng của nó để xác định các giá trị min, max của nghiệm đầu ra. Trình tự các bước của thuật giải được thực hiện như sau:

Từ phương trình cân bằng của hệ kết cấu theo phương pháp PTHH có tham số khoảng (1), sau khi xử lý các điều kiện biên (khử suy biến) ta viết lại phương trình như sau:

$$\{\breve{q}\}=[\breve{k}]^{-1}.\{\breve{f}\} \tag{4}$$

Khai triển phương trình (4) ta có:

$$\{\breve{q}\}=\begin{Bmatrix}\breve{q}_1\\ \breve{q}_2\\ \dots\\ \breve{q}_n\end{Bmatrix}=[\breve{k}]^{-1}.\{\breve{f}\}=\begin{bmatrix}\breve{k}_{11} & \breve{k}_{12} & \dots & \breve{k}_{1n}\\ \breve{k}_{21} & \breve{k}_{22} & \dots & \breve{k}_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \breve{k}_{n1} & \breve{k}_{n2} & \dots & \breve{k}_{nn}\end{bmatrix}^{-1} x\begin{Bmatrix}\breve{f}_1\\ \breve{f}_2\\ \dots\\ \breve{f}_n\end{Bmatrix} \tag{5}$$

Đặt $[\breve{\delta}]=[\breve{k}]^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu, $[\breve{\delta}]$ được tính toán trực tiếp bằng phần mềm Maple.13 với điều kiện định thức của $[\breve{k}]$ khác không. Phương trình (5) viết lại:

$$\{\breve{q}\}=\begin{Bmatrix}\breve{q}_1\\ \breve{q}_2\\ \dots\\ \breve{q}_n\end{Bmatrix}=[\breve{\delta}].\{\breve{f}\}=\begin{bmatrix}\breve{\delta}_{11} & \breve{\delta}_{12} & \dots & \breve{\delta}_{1n}\\ \breve{\delta}_{21} & \breve{\delta}_{22} & \dots & \breve{\delta}_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \breve{\delta}_{n1} & \breve{\delta}_{n2} & \dots & \breve{\delta}_{nn}\end{bmatrix} x\begin{Bmatrix}\breve{f}_1\\ \breve{f}_2\\ \dots\\ \breve{f}_n\end{Bmatrix} \tag{6}$$

trong đó phần tử $\breve{\delta}_{ij} = \frac{1}{\det(\breve{k})}(-1)^{i+j}.\det(\breve{M}_{ij})$ với $\det(\breve{k})$ là định thức của ma trận độ cứng tổng thể $[\breve{k}]$; $\det(\breve{M}_{ij})$ là định thức của ma trận $[\breve{M}_{ij}]$; ma trận $[\breve{M}_{ij}]$ là ma trận con suy ra từ ma trận$[\breve{k}]$ bằng cách bỏ đi hàng i, cột j của $[\breve{k}]$.

Phương trình (6) chuyển về dạng hệ phương trình đại số tuyến tính:

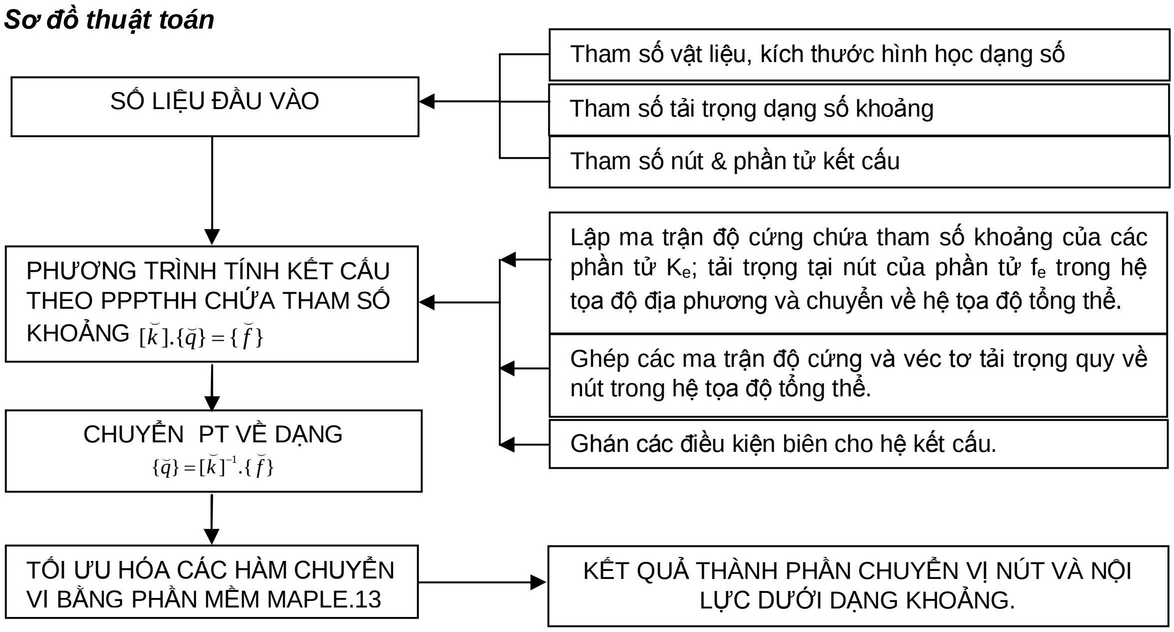
$$\begin{cases} \breve{q}_1 = \breve{\delta}_{11}\breve{f}_1 + \breve{\delta}_{12}\breve{f}_2 + \ldots + \breve{\delta}_{1n}\breve{f}_n \\ \breve{q}_2 = \breve{\delta}_{21}\breve{f}_1 + \breve{\delta}_{22}\breve{f}_2 + \ldots + \breve{\delta}_{2n}\breve{f}_n \\ \ldots. \\ \breve{q}_n = \breve{\delta}_{n1}\breve{f}_1 + \breve{\delta}_{n2}\breve{f}_2 + \ldots + \breve{\delta}_{nn}\breve{f}_n \end{cases} \qquad (7)$$

Xét phương trình thứ i của hệ phương trình (7).

$$\breve{q}_i = \breve{\delta}_{i1}\breve{f}_1 + \breve{\delta}_{i2}\breve{f}_2 + \ldots + \breve{\delta}_{in}\breve{f}_n \qquad (8)$$

trong phương trình (8), vế trái là thành phần chuyển vị khoảng thứ i cần tìm, được xác định từ các tham số khoảng $\breve{\delta}_{ij}$ và $\breve{f}_i$ (i,j = 1,2,…,n), ta xem phương trình (8) như một hàm số khoảng xác định biến đầu ra $\breve{q}_i$ theo các biến đầu vào là$\breve{\delta}_{ij}$ và $\breve{f}_i$ bằng cách tối ưu hóa khoảng để tìm các giá trị max và min của $\breve{q}_i$. Thực hiện đối với tất cả các phương trình của hệ (7) sẽ xác định được tất cả các thành phần chuyển vị khoảng của kết cấu. Sau khi có chuyển vị của các nút, hoàn toàn có thể xác định được nội lực và ứng suất của kết cấu dưới dạng số khoảng.

3.4 Sơ đồ thuật toán



Hình 1. *Sơ đồ thuật toán phân tích kết cấu theo PPPTHH khoảng*

4. Ứng dụng tính toán chuyển vị một số bài toán minh họa

4.1 Kết cấu thanh phẳng một chiều

4.1.1 Số liệu đầu vào

Hệ kết cấu trục bậc có kích thước và chịu tải trọng P_1,P_2 như hình 2, thông số đầu vào dưới dạng số khoảng như sau:

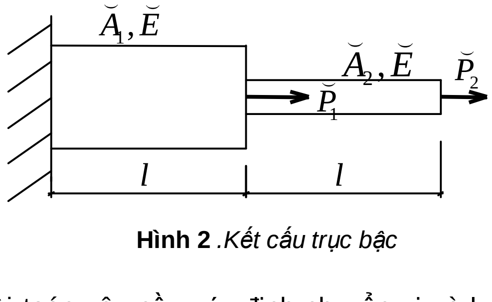
$\breve{E}$ =[195,205].10^6 (kN/m^2),

$\breve{A}_1$ = [9.75,10.25].10^{-4} (m^2),

$\breve{A}_2$ = [6.825,7.175].10^{-4} (m^2),

$\breve{P}_1$ =[28.5,31.5](kN),

$\breve{P}_2$ =[47.5,52.5](kN), *l* =1.5(m).

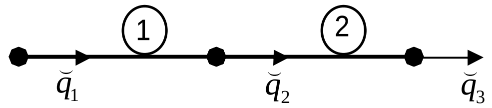


Hình 2 .*Kết cấu trục bậc*

Bài toán yêu cầu xác định chuyển vị và lực dọc theo phương pháp tối ưu khoảng sau đó so sánh kết quả đã được tính toán trong [2].

4.1.2 Trình tự tính toán

Chia trục bậc thành hai phần tử và đánh số thứ tự các nút như hình số 3:



Hình 3.*Sơ đồ phần tử kết cấu trục bậc*

a. *Bảng ghi số phần tử và số nút của hệ*

Bảng 1. *Số phần tử và số nút hệ thanh phẳng một chiều*

Phần tử	Số chuyển vị nút	
1	1	2
2	2	3

b. *Lập ma trận độ cứng các phần tử của hệ*

$$[\breve{k}_1]=\frac{\breve{A}_1\breve{E}}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix};\ [\breve{k}_2]=\frac{\breve{A}_2\breve{E}}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix};$$

c. *Lập ma trận độ cứng tổng thể cho hệ:* theo phương pháp cộng độ cứng trực tiếp, ma trận độ cứng tổng thể của hệ có kích thước 3 x 3.

d. *Véc tơ lực nút:* $\left\{\breve{f}\right\}=\{\breve{R}\ \ \breve{P}_1\ \ \breve{P}_2\}^T$

e. *Hệ phương trình PPPTHH khoảng:*

$$[\breve{k}]_{3x3}.\{\breve{q}\}_{3x1}=\{\breve{f}\}_{3x1}$$

f. Trình tự tính toán theo thuật toán tối ưu khoảng được lập trình tính trên phần mềm Maple13, kết quả tính toán được so sánh với kết quả tính theo các phương pháp trích dẫn trong [2] được trình bày trong bảng 2 và 3.

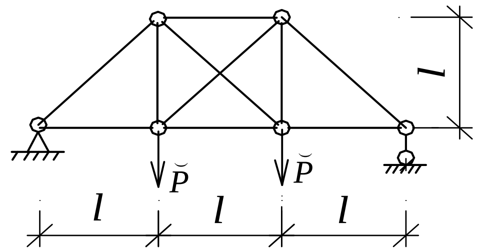
Bảng 2. *Kết quả chuyển vị nút*

Chuyển vị	Nghiệm giải tích [2] (m)	Nghiệm theo phương pháp EBE [2] (m)	Nghiệm theo phương pháp tối ưu khoảng (m)
$\breve{q}_1$	[0.0000, 0.0000]	[0.0000, 0.0001]	[0.0000, 0.0000]
$\breve{q}_2$	[0.0005425, 0.0006628]	[0.0004, 0.0008]	[0.0005561, 0.00064612]
$\breve{q}_3$	[0.001, 0.0013]	[0.0009, 0.0014]	[0.00105, 0.001223]

Bảng 3. *Kết quả lực dọc trong các phần tử*

Phần tử	Nghiệm giải tích [2] (kN)	Nghiệm theo phương pháp EBE [2] (kN)	Nghiệm theo phương pháp tối ưu khoảng (kN)
1	[76, 84]	[75.6801, 84.3199]	[76, 84]
2	[47.5, 52.5]	[47.5000, 52.5000]	[47.5, 52.5]

Từ kết quả trên, ta nhận thấy kết quả lực dọc theo phương pháp tối ưu khoảng bằng với kết quả lực dọc theo phép tính giải tích, còn kết quả chuyển vị thì xấp xỉ tốt với kết quả chuyển vị tính theo giải tích và co hẹp hơn kết quả tính theo phương pháp PTHH khoảng- mô hình EBE [2].



Hình 4.*Sơ đồ kết cấu dàn phẳng*

4.2 Tính kết cấu hệ dàn phẳng

4.2.1 Số liệu đầu vào

Kết cấu dàn phẳng chịu tải trọng như hình 4. Các thanh có cùng diện tích mặt cắt ngang là $\breve{A}$, mô đun đàn hồi là $\breve{E}$. Xác định các thành phần chuyển vị của nút và lực dọc trong các thanh dàn khi các đại lượng:

$\breve{E}$=[195, 205].10^6(kN/m^2),

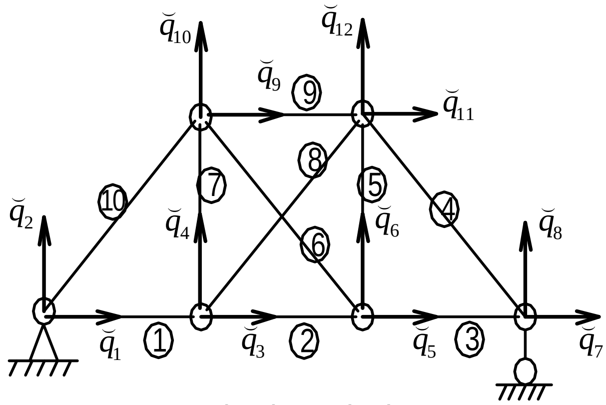
$\breve{A}$=[9.75, 10.25].10^{-4} (m^2),

$\breve{P}$=[133, 147](kN),

l = 4.5(m).

4.2.2 Trình tự tính toán

Chia phần tử và đánh số thứ tự chuyển vị nút như hình 5.



Hình 5.*Sơ đồ phần tử kết cấu dàn*

a. Bảng ghi phần tử và chuyển vị nút kết cấu

Bảng 4. *Số phần tử và số chuyển vị nút hệ kết cấu dàn phẳng*

Phần tử	Số chuyển vị của nút			
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	5	6	7	8
4	7	8	11	12
5	5	6	11	12
6	5	6	9	10
7	3	4	9	10
8	3	4	11	12
9	9	10	11	12
10	1	2	9	10

b. Lập ma trận độ cứng của các phần tử

Ma trận độ cứng phần tử thanh dàn có dạng:

$$[\breve{k}_e] = \frac{\breve{A}_e\breve{E}_e}{\breve{l}_e}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

Trong đó: c, s là các cosα và sinα, với α là góc lượng giác của phần tử thanh thứ e so với phương ngang. Theo thứ tự số nút và số chuyển vị nút như hình 5, ta lập ma trận độ cứng cho các phần tử của hệ kết cấu như dưới.

$$[\breve{k}_1]=[\breve{k}_2]=[\breve{k}_3]=[\breve{k}_9] = \frac{\breve{A}\breve{E}}{\breve{l}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\breve{k}_4]=[\breve{k}_6] = \frac{\breve{A}\breve{E}}{\breve{l}}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[\breve{k}_8]=[\breve{k}_{10}] = \frac{\breve{A}\breve{E}}{\breve{l}}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[\breve{k}_5]=[\breve{k}_7] = \frac{\breve{A}\breve{E}}{\breve{l}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Lập ma trận độ cứng tổng thể cho hệ kết cấu: theo phương pháp cộng độ cứng trực tiếp, ma trận độ cứng tổng thể của hệ kết cấu dàn có kích thước 12 x 12.

d. Véc tơ lực nút: $\left\{\breve{f}\right\} = [\breve{R}_1 \;\; \breve{R}_2 \; 0 \; -\breve{P} \;\; 0 \; -\breve{P} \;\; 0 \;\; \breve{R}_8 \;\; 0\;0\;0\;0]^T$

e. Hệ phương trình PPPTHH khoảng: $[\breve{k}]_{12x12}.\{\breve{q}\}_{12x1} = \{\breve{f}\}_{12x1}$

Trình tự tính toán theo thuật toán tối ưu khoảng được lập trình tính trên phần mềm Maple13. Kết quả tính toán so sánh với kết quả tính theo các phương pháp trích dẫn trong [2] được trình bày trong bảng dưới.

Bảng 5. *Kết quả chuyển vị nút*

Chuyển vị	Nghiệm giải tích [2] (m)	Nghiệm theo phương pháp EBE [2] (m)	Nghiệm theo phương pháp tối ưu khoảng (m)
$\breve{q}_1$	[0.0000, 0.0000]	[0.0000, 0.0001]	[0.0000, 0.0000]
$\breve{q}_2$	[0.0000, 0.0000]	[-0.0001, 0.0001]	[0.0000, 0.0000]
$\breve{q}_3$	[0.0031, 0.0032]	[0.0028, 0.0035]	[0.00292, 0.00339]
$\breve{q}_4$	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	[-0.0191, -0.0164]
$\breve{q}_5$	[0.0055, 0.0058]	[0.0050, 0.0063]	[0.00523, 0.00608]
$\breve{q}_6$	[-0.0181, -0.0173]	[-0.0191, -0.0163]	[-0.0191, -0.0164]
$\breve{q}_7$	[0.0086, 0.009]	[0.0079, 0.0097]	[0.00815, 0.00947]
$\breve{q}_8$	[0.0000, 0.0000]	[-0.0001, 0.0001]	[0.0000, 0.0000]
$\breve{q}_9$	[0.0061, 0.0065]	[0.0056, 0.0070]	[0.00584, 0.00678]
$\breve{q}_{10}$	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]	[-0.0164, -0.0140]
$\breve{q}_{11}$	[0.0024, 0.0026]	[0.0021, 0.0029]	[0.00231, 0.00269]
$\breve{q}_{12}$	[-0.0156, -0.0148]	[-0.0165, -0.0140]	[-0.0164, -0.0140]

Bảng 6. *Kết quả tính lực dọc*

Phần tử	Nghiệm giải tích [2] (kN)	Nghiệm theo phương pháp EBE [2] (kN)	Nghiệm theo phương pháp tối ưu khoảng (kN)
1	[133, 147]	[125.7104, 154.2896]	[133.000, 147.000]
2	[105.4548, 116.5553]	[71.3279, 150.6854]	[105.4548, 116.5553]
3	[133, 147]	[77.6170, 202.3830]	[133.000, 147.000]
4	[-207.8894, -188.0904]	[-250.3317, -145.6481]	[-207.8894, -188.0904]
5	[105.4548, 116.5553]	[-2.0720, 224.0853]	[105.4548, 116.5553]
6	[38.9548, 43.0553]	[-41.8504, 123.8560]	[38.9548, 43.0553]
7	[105.4548, 116.5553]	[-2.2920, 224.3053]	[105.4548, 116.5553]
8	[38.9548, 43.0553]	[-29.8213, 111.8269]	[38.9548, 43.0553]
9	[-177.4447, -160.5452]	[-210.2915, -127.6952]	[-177.4447, -160.5452]
10	[-207.8894, -188.0904]	[-238.1901, -157.7897]	[-207.8894, -188.0904]

Nhận xét: kết quả tính chuyển vị theo phương pháp tối ưu khoảng xấp xỉ tốt với kết quả tính theo giải tích và hẹp hơn so với kết quả theo phương pháp PTHH - mô hình EBE theo [2]. Kết quả tính lực dọc gần như giống kết quả lực dọc tính theo phương pháp giải tích, trong khi kết quả theo EBE [2] lại cho sai khác khá lớn.

5. Thảo luận

Từ kết quả tính toán và so sánh với kết quả tính toán theo các phương pháp giải tích, phương pháp PTHH – mô hình EBE ở trên, cho thấy kết quả tính theo phương pháp *"Tối ưu khoảng"* là phù hợp, có thể áp dụng để phân tích và tính các bài toán kết cấu chịu tải trọng tĩnh làm cơ sở cho nghiên cứu xác định phản ứng động của kết cấu chịu tải trọng động. Tuy nhiên, việc tính toán xác định nghiệm đầu ra dưới dạng hàm số chứa các đại lượng đầu vào đòi hỏi bài toán phải có nghiệm đóng và số bậc tự do của bài toán không quá lớn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. LÊ XUÂN HUỲNH, LÊ CÔNG DUY. "Một cách giải phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn khi có hàm thuộc của tham số mờ", *Tạp chí KHCN Xây dựng, 2012.*
2. TRẦN VĂN LIÊN. "Phân tích kết cấu thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn khoảng", *Tạp chí khoa học công nghệ Xây dựng, số 4/2008.*
3. TRẦN VĂN LIÊN, NGUYỄN TẤT THẮNG, NGUYỄN THANH BÌNH. "Phân tích kết cấu khung bằng phương pháp phần tử hữu hạn khoảng", *Tạp chí khoa học công nghệ Xây dựng, 3/2013.*
4. Gareth I Hargreaves "Interval analysis in Matlab", *2002.*
5. R B KEARFOTT "Interval computations introduction uses and resourse". *Euromath Bulletin Journal, 1996.*
6. HAO ZHANG "Nondeterministic linear static finite element analysis", *An Interval Approach 2005.*

Ngày nhận bài sửa: 2/9/2014.