Trong hệ cơ bản, tải trọng $P=1$ chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trên phạm vi mỗi phần tử nên có thể dễ dàng tìm các tung độ của chúng theo các số liệu cho trong bảng 6.4 và 6.5. Kết quả tính được ghi trên bảng 6.8.

Sau khi tổ hợp các số liệu vừa tìm được theo các công thức nêu ở trên ta sẽ tìm được giá trị các tung độ đường ảnh hưởng nội lực cần tìm. Kết quả ghi trên bảng 6.8. Các đường ảnh hưởng tương ứng vẽ trên hình 6.25e,f.

CÂU HỎI ÔN TẬP

6.1. Trình bày và phân tích những giả thiết cơ bản của phương pháp chuyển vị.

6.2. Trình bày cách xác định bậc siêu động trong phương pháp chuyển vị (cho ví dụ). Bậc siêu động phụ thuộc vào những yếu tố nào?

6.3. Trình bày cách lập hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị.

6.4. Trình bày nội dung phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu tải trọng.

6.5. Trình bày cách xác định các hệ số, số hạng tự do trong phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu tải trọng.

6.6. Trình bày cách xác định chuyển vị khi tính hệ chịu tác dụng của tải trọng theo phương pháp chuyển vị.

6.7. Trình bày cách xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh trong hệ có các thanh đứng không song song.

6.8. Thông qua một ví dụ, trình bày nội dung phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu chuyển vị cưỡng bức gối tựa.

6.9. Thông qua một ví dụ, trình bày nội dung phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ.

6.10. Phát biểu và giải thích kết luận về hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng tập trung chỉ đặt ở nút.

7 Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp

Trong các chương trên, ta đã nghiên cứu phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, đó là các phương pháp cơ bản và được xem là chính xác, tổng quát. Trong thực hành, khi tính một hệ thanh cụ thể, cần đặt vấn đề:

- Nên chọn dùng phương pháp nào?
- Có thể phối hợp hai phương pháp đó để giảm nhẹ khối lượng tính toán được hay không?

Đó là nội dung sẽ đề cập đến trong chương này.

7.1. So sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị - Cách chọn phương pháp tính

Để thấy được ưu khuyết điểm của từng phương pháp, ta hãy lập bảng so sánh (bảng 7.1) hai phương pháp tương ứng với các nội dung cần thực hiện trong quá trình tính toán một kết cấu siêu tĩnh đồng thời là siêu động.

Qua bảng so sánh 7.1 ta thấy: phương pháp chuyển vị nói chung đơn giản hơn so với phương pháp lực. Tuy nhiên cũng không thể kết luận được là phương pháp chuyển vị ưu việt hơn phương pháp lực. Cần phải căn cứ vào bài toán cụ thể và công cụ tính toán của người thiết kế để chọn lựa phương pháp tính. Nếu chỉ có công cụ tính toán thông thường thì người thiết kế nên căn cứ vào số lượng ẩn số để quyết định việc chọn lựa. Tất nhiên, đối với một bài toán cụ thể, nên chọn dùng phương pháp nào có ẩn số ít hơn. Trong trường hợp số ẩn số theo cả hai phương pháp tương đương nhau, nên chọn đúng phương pháp chuyển vị vì các khâu tính toán trong phương pháp này thường đơn giản hơn.

Đối với những hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ, ta có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để phân tích nguyên nhân tác dụng thành đối xứng và phản xứng (xem mục 5.7). Như vậy, có thể đưa bài toán về hai trường hợp:

✦ *Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng.* Nói chung, để giải bài toán này ta nên vận dụng phương pháp chuyển vị vì phương pháp này thường cho số ẩn ít hơn.

✦ *Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng*. Nói chung nên dùng phương pháp lực để giải bài toán này vì thường có số ẩn ít hơn.

Bảng 7.1

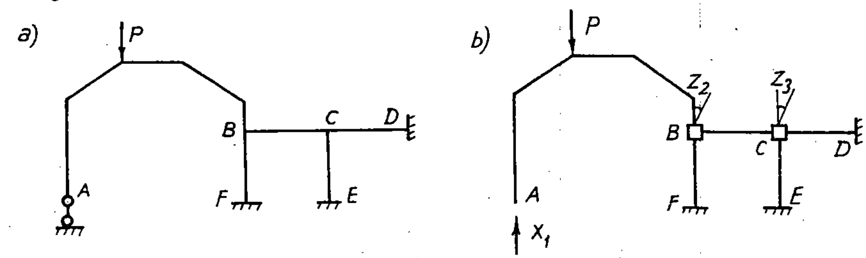
Nội dung so sánh	Phương pháp lực	Phương pháp chuyển vị
Độ chính xác	Nếu chấp nhận các giả thiết như nhau thì kết quả hoàn toàn giống nhau.	
Phạm vi áp dụng	Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ.	Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ, thường chỉ nên áp dụng cho hệ khung, dầm.
Số ẩn số	Bằng bậc siêu tĩnh (không phụ thuộc các giả thiết).	Bằng bậc siêu động (phụ thuộc các giả thiết, cấu kiện mẫu, sơ đồ tính chấp nhận).
Hệ cơ bản	• Loại bỏ bớt liên kết, bất biến hình. • Có thể chọn theo nhiều cách khác nhau. • Cách chọn có ảnh hưởng đến khối lượng tính toán.	• Thêm liên kết ngăn cản chuyển vị của các nút. • Duy nhất, chỉ bao gồm các phần tử mẫu.
Biểu đồ $\overline{M}_k$ và M_P^o	Người thiết kế tự vẽ (tốn thời gian, dễ có sai lầm).	Vẽ theo bảng mẫu (ít sai lầm).
Biểu đồ do sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị gối tựa trong hệ cơ bản	Không tồn tại nếu hệ cơ bản là tĩnh định.	Tồn tại (phức tạp, dễ có sai lầm).
Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc	Cần thực hiện phép nhân biểu đồ để xác định (phức tạp, dễ sai lầm).	Tìm theo các điều kiện cân bằng (đơn giản, ít sai lầm).
Hệ phương trình chính tắc	Nói chung đầy đủ (các hệ số phụ khác không) nên tốn thời gian hơn khi giải hệ phương trình.	Nói chung không đầy đủ (có nhiều hệ số phụ bằng không), đỡ tốn thời gian hơn khi giải hệ phương trình.
Biểu đồ M cuối cùng	Tương đương (cùng tìm được bằng cách tổ hợp các biểu đồ đã có).	
Kiểm tra kết quả	Theo điều kiện chuyển vị nên phức tạp, khó phát hiện.	Theo điều kiện cân bằng nên đơn giản.

Trong thực tế ta có thể gặp những hệ (hình 7.1), trong đó có bộ phận thích hợp với cách giải theo phương pháp chuyển vị (phần *BCDEF*), có bộ phận thích hợp với cách giải theo phương pháp lực (phần *AB*). Nếu dùng độc lập một trong hai phương pháp để giải bài toán thì sẽ phức tạp (số lượng ẩn lớn). Như vậy, đối với những hệ này ta có thể đồng thời phát huy ưu điểm của cả hai phương pháp đó hay không? Những phương pháp trình bày dưới đây sẽ đáp ứng được vấn đề này.

7.2. Phương pháp hỗn hợp

Để trình bày nội dung phương pháp, ta xét hệ trên hình 7.1a với giả thiết hệ c chịu tác dụng của tải trọng. Đối với những nguyên nhân khác, nguyên tắc tí toán cũng tương tự. Ta nhận thấy, nếu dùng phương pháp lực để tính thì hệ tr hình 7.1a có bảy ẩn số, còn nếu dùng phương pháp chuyển vị sẽ có mười ẩn s Để giải bài toán này, nếu vận dụng phương pháp hỗn hợp do *A.A. Gvôzđiev* ki nghị thì số lượng ẩn số sẽ giảm xuống khá nhiều.

Trong phương pháp hỗn hợp ta chọn hệ cơ bản như sau: *loại bỏ các liên kết và ch lực làm ẩn số trên các bộ phận thích hợp với phương pháp lực, đặt thêm các liên k ngăn cản chuyển vị của các nút và chọn chuyển vị của các nút đó làm ẩn số tr những bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị.*



Hình 7.1

Ví dụ, đối với hệ cho trên hình 7.1a, trong bộ phận *AB* thích hợp với phương ph lực ta loại bỏ gối tựa di động *A* và thay thế bằng phản lực X_1 chưa biết; trong phận *BCDEF* thích hợp với phương pháp chuyển vị ta đặt thêm hai liên k mômen tại nút *B* và nút *C* đồng thời nhận các chuyển vị xoay Z_2 và Z_3 tại các n này làm ẩn số. Hệ cơ bản của phương pháp hỗn hợp đối với hệ đang xét là hệ trên hình 7.1b. Như vậy, số ẩn số theo phương pháp hỗn hợp là ba. Tương tự nh trong phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, để tính hệ đã cho theo phươ pháp hỗn hợp ta cũng thực hiện tính toán trên hệ cơ bản đồng thời phải thiết l các điều kiện bổ sung nhằm đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống như hệ đã ch

Các điều kiện bổ sung bao gồm:

❖ *Chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ do các lực X, các chuyển cưỡng bức Z và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không*. Đối v hệ trên hình 7.1, ta có điều kiện: chuyển vị tại *A* theo phương thẳng đứng do X Z_2, Z_3 và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không, tức là $\Delta_1 = 0$.

❖ *Phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ do các lực X, các chuyển vị cưỡ bức Z và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không*. Đối với hệ đa xét, ta có điều kiện: phản lực mômen trong các liên kết ở nút *B* và *C* do X_1, Z

Z_3 và do tải trọng gây ra phải bằng không, tức là $R_2 = 0;\ R_3 = 0$.

Trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng, sau khi khai triển các điều kiện bổ sung ta sẽ được hệ phương trình chính tắc của phương pháp hỗn hợp để xác định các ẩn số X và Z. Đối với hệ đang xét, hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{aligned} &\delta_{11}X_1 + \dot\delta_{12}Z_2 + \dot\delta_{13}Z_3 + \Delta_{1P} = 0\,;\\ &\dot r_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} = 0\,;\\ &\dot r_{31}X_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} = 0\,. \end{aligned} \qquad (7.1)$$

Trong hệ phương trình chính tắc của phương pháp hỗn hợp có bốn loại hệ số và hai loại số hạng tự do. Ta hãy tìm hiểu ý nghĩa và cách xác định chúng.

δ_{ik} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_i do lực $X_k=1$ gây ra trong hệ cơ bản. Chuyển vị này được xác định theo công thức quen biết:

$$\delta_{ik} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_k),$$

với $(\overline{M}_i),(\overline{M}_k)$ là biểu đồ mômen uốn lần lượt do $X_i=1$ và do $X_k=1$ gây ra trong hệ cơ bản.

$\dot\delta_{ij}$ – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_i do chuyển vị cưỡng bức $Z_j=1$ gây ra trong hệ cơ bản (ký hiệu dấu chấm ở phía trên để nói lên chuyển vị này do chuyển vị cưỡng bức gây ra, phân biệt với chuyển vị do lực gây ra). Có thể xác định các chuyển vị này theo định lý tương hỗ giữa chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị $\dot\delta_{ij} = -\dot r_{ji}$ hoặc theo công thức chuyển vị (4.25), hoặc xác định trực tiếp bằng hình học.

r_{js} – phản lực trong liên kết thứ j do chuyển vị cưỡng bức $Z_s=1$ gây ra trong hệ cơ bản. Phản lực này được xác định theo các điều kiện cân bằng như đã trình bày trong phương pháp chuyển vị.

$\dot r_{ji}$ – phản lực trong liên kết thứ j do lực $X_i=1$ gây ra trong hệ cơ bản (ký hiệu dấu chấm ở phía trên để nói lên phản lực này do lực gây ra, phân biệt với phản lực do chuyển vị gây ra). Phản lực này được xác định theo các điều kiện cân bằng như đã quen biết trong phương pháp chuyển vị.

Δ_{iP} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_i do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, được xác định theo công thức quen biết trong phương pháp lực:

$$\Delta_{iP} = (\overline{M}_i)(M_P^o),$$

với (M_P^o) là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

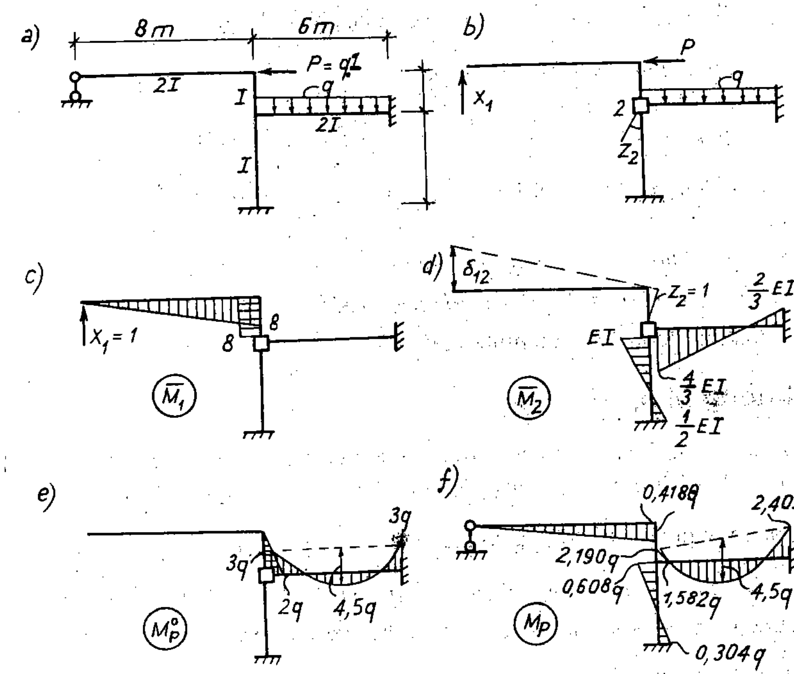
R_{jP} – phản lực tại liên kết thứ j do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, được xác định theo các điều kiện cân bằng như đã quen biết trong phương pháp chuyển vị.

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để xác định các ẩn số X và Z ta vẽ biểu đồ nội lực trong hệ bằng cách tổ hợp các biểu đồ tương tự như đã thực hiện trong phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Ví dụ đối với hệ đang xét, biểu đồ mômen uốn cuối cùng tìm được theo công thức sau:

$$(M_P) = (\overline{M}_1)X_1 + (\overline{M}_2)Z_2 + (\overline{M}_3)Z_3 + (M_P^o)\,. \qquad (7.2)$$

Để kiểm tra kết quả ta có các điều kiện sau: chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ và phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ, phải bằng không.

Ví dụ 7.1. Vận dụng phương pháp hỗn hợp để vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ trên hình 7.2a.



Hình 7.2

Ta giải bài toán theo thứ tự như sau:

1. Lập hệ cơ bản: Nếu dùng phương pháp chuyển vị để giải bài toán thì sẽ có ba ẩn số, còn nếu dùng phương pháp lực thì sẽ có bốn ẩn số. Ta nhận thấy phần bên trái của hệ thích hợp với phương pháp lực còn phần bên phải của hệ thích hợp với phương pháp chuyển vị. Do đó ta sẽ chọn hệ cơ bản theo phương pháp hỗn hợp như trên hình 7.2a, với hai ẩn số là X_1 và Z_2.

2. *Vẽ các biểu đồ mômen uốn đơn vị* do $X_1=1$ (hình 7.2c), do $Z_2=1$ (hình 7.2d) và *biểu đồ mômen uốn do tải trọng* (hình 7.2e) gây ra trong hệ cơ bản.

3. *Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc*

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \frac{1}{E.2I}\frac{8.8}{2}\frac{2.8}{3} + \frac{1}{EI}8.2.8 = \frac{640}{3EI};$$

$$\delta_{12} = -r_{21} = 8, \text{ (tách nút 2 của biểu đồ } \overline{M}_1);$$

$$r_{22} = \frac{4}{3}EI + EI = \frac{7EI}{3} \text{ (tách nút 2 của biểu đồ } \overline{M}_2);$$

$$\Delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M_P^o) = -\frac{1}{EI}\frac{2q.2}{2}.8 = -\frac{16q}{EI},$$

$$R_{2P} = 2q - 3q = -q \text{ (tách nút 2 của biểu đồ } M_P^o)$$

4. *Thiết lập hệ phương trình chính tắc*

$$\frac{640}{3EI}X_1 + 8Z_2 - \frac{16q}{EI} = 0; \qquad -8X_1 + \frac{7EI}{3}Z_2 - q = 0.$$

5. *Giải hệ phương trình chính tắc*. Kết quả: $X_1 = \dfrac{33}{632}q$ kN; $Z_2 = \dfrac{48}{79EI}q$ rad.

6. *Vẽ biểu đồ mômen uốn tổng cộng* theo công thức:

$$(M_P) = (\overline{M}_1)X_1 + (\overline{M}_2)Z_2 + (M_P^o).$$

Kết quả tìm được như trên hình 7.2f.

7.3. Phương pháp liên hợp

Để giải những loại bài toán nêu ở trên, ta còn có thể vận dụng phương pháp liên hợp, trong đó *phối hợp song song phương pháp lực và phương pháp chuyển vị*.

Trong phương pháp liên hợp, ta có thể thực hiện theo một trong hai hướng sau:

✦ *Chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực.*

Lúc này hệ cơ bản là siêu tĩnh. Để vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản siêu tĩnh ta sẽ vận dụng phương pháp chuyển vị bởi vì bộ phận siêu tĩnh của hệ cơ bản chính là bộ phận thích hợp phương pháp chuyển vị.

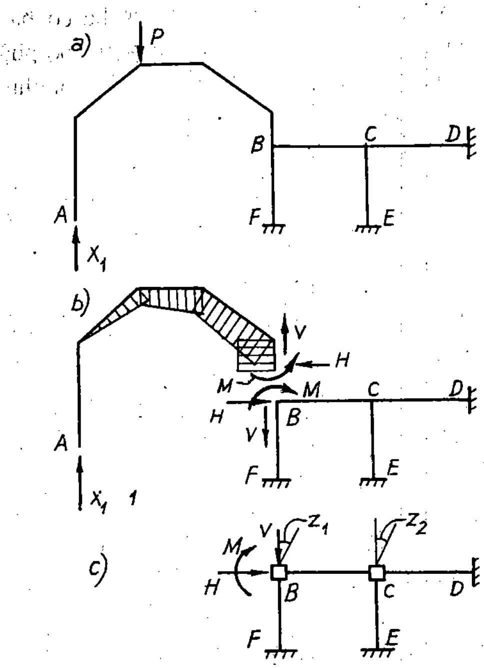
Để làm sáng tỏ, ta xét hệ cho trên hình 7.1a. Chọn hệ cơ bản siêu tĩnh như trên hình 7.3a. Phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \tag{7.3}$$

Hệ số δ_{11} và số hạng tự do Δ_{1P} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_1 lần lượt do lực $X_1=1$ và do tải trọng gây ra *trong hệ cơ bản siêu tĩnh*.

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta vẫn sử dụng công thức chuyển vị quen biết song cần phải vẽ được biểu đồ nội lực do $X_1=1$ và do tải trọng gây ra *trong hệ cơ bản siêu tĩnh*.

Chẳng hạn muốn tìm biểu đồ mômen uốn do riêng lực X_1 gây ra trong hệ cơ bản siêu tĩnh thì ta sẽ thực hiện như thế nào?



Hình 7.3

Lúc này, trong bộ phận tĩnh định của hệ ta vẽ biểu đồ mômen uốn như thường lệ còn trong bộ phận siêu tĩnh của hệ thì sẽ dùng phương pháp chuyển vị để giải với các ngoại lực *M, V, H* được xác định theo lực $X_1=1$ (hình 7.3b). Hệ cơ bản của bài toán phụ này có dạng như trên hình 7.3c. Hệ phương trình chính tắc tương ứng:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0; \qquad r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0. \tag{7.4}$$

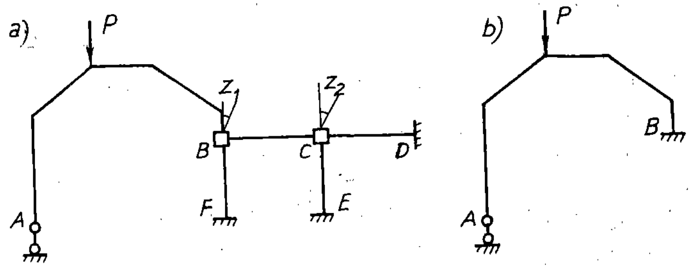
Sau khi giải bài toán phụ với các ẩn Z, ta sẽ tìm được các biểu đồ cần thiết trong hệ cơ bản của phương pháp lực. Để tránh phải giải nhiều lần hệ phương trình (7.4) với các nguyên nhân khác nhau, ta dùng phương pháp hệ số ảnh hưởng.

Biểu đồ nội lực cuối cùng sẽ tìm được theo công thức quen biết trong phương pháp lực sau khi giải hệ phương trình (7.3). Trong trường hợp hệ đang xét, ta có

$$(M_P) = (\overline{M}_1)X_1 + (M_P^o). \tag{7.5}$$

✦ *Chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản tất cả các chuyển vị nút mà chỉ đặt liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị.*

Lúc này *hệ cơ bản là siêu động*, còn có một số phần tử không phải là phần tử mẫu. Để vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản siêu động, ta sẽ vận dụng phương pháp lực bởi vì bộ phận siêu động (bộ phận có các phần tử không phải là phần tử mẫu) chính là bộ phận thích hợp với phương pháp lực.



Hình 7.4

Ví dụ, với hệ trên hình 7.1a, ta lập hệ cơ bản như trên hình 7.4a, trong đó phần tử AB không phải là phần tử mẫu. Hệ có hai ẩn số là Z_1 và Z_2. Trước khi giải bài toán này ta cần thực hiện bài toán phụ: tìm nội lực trong phần tử không phải là phần tử mẫu (phần tử AB trên hình 7.4b) chịu tác dụng của tải trọng và chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết (chuyển vị xoay tại ngàm B). Bài toán phụ này sẽ được thực hiện theo phương pháp lực với các ẩn số X (ẩn số X_1).

Sau khi giải bài toán phụ ta có thể dễ dàng giải bài toán chính theo phương pháp chuyển vị quen biết với hệ cơ bản là siêu động.

Như vậy, trong cả hai cách thực hiện, phương pháp liên hợp đều đưa bài toán về hai bài toán độc lập, một bài toán được giải theo phương pháp lực còn một bài toán được giải theo phương pháp chuyển vị. So với phương pháp hỗn hợp, số ẩn số tổng cộng của hai phương pháp như nhau nhưng trong phương pháp liên hợp các phương trình chính tắc được phân thành hai nhóm độc lập với nhau. Đó là ưu điểm chính của phương pháp liên hợp.

CÂU HỎI ÔN TẬP

7.1. So sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

7.2. Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ, nên thực hiện như thế nào?

7.3. Phương pháp hỗn hợp:
- nên áp dụng cho những trường hợp nào?
- trình bày nội dung phương pháp qua một ví dụ.

7.4. Phương pháp liên hợp:
- nên áp dụng cho những trường hợp nào?
- trình bày nội dung phương pháp qua một ví dụ.

7.5. So sánh phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp.

8 Hệ không gian

Trong các chương trước ta đã nghiên cứu hệ phẳng là những hệ trong đó trục của các thanh đều nằm trong cùng một mặt phẳng, chỉ cân bằng khi tải trọng tác dụng nằm trong mặt phẳng của hệ.

Phần lớn các hệ trong thực tế đều có sơ đồ không nằm trong cùng một mặt phẳng, gọi là *hệ không gian*. Trong khá nhiều trường hợp ta có thể phân tích bài toán không gian để đưa về cách tính theo sơ đồ phẳng. Song, cũng có những trường hợp không thể phân tích thành sơ đồ phẳng hoặc tính toán theo sơ đồ phẳng sẽ dẫn đến sai số lớn thì nhất thiết phải thực hiện tính toán theo sơ đồ không gian.

Cũng tương tự như trong hệ phẳng, hệ không gian dùng trong xây dựng phải là hệ bất biến hình. Về nguyên tắc cách cấu tạo hình học các hệ không gian cũng tương tự như các hệ phẳng nhưng có phần phức tạp hơn khi vận dụng. Thay cho khái niệm *miếng cứng* dùng trong hệ phẳng, trong trường hợp hệ không gian ta dùng khái niệm *vật thể*.

Vật thể là một hệ không gian bất biến hình một cách rõ rệt.

Ngoài ra cần chú ý là trong không gian một vật thể có sáu bậc tự do (ba chuyển vị tịnh tiến và ba chuyển vị xoay) so với một vật thể khác được xem là bất động.

8.1. Các loại liên kết không gian

Để nối các vật thể thành một hệ không gian bất biến hình, ta dùng các liên kết không gian. Tương tự như liên kết phẳng, liên kết không gian được chia thành liên kết đơn giản và liên kết phức tạp.

A. Liên kết đơn giản

Liên kết đơn giản là liên kết dùng để nối hai vật thể. Dưới đây là một số dạng liên kết đơn giản thường gặp.

1. Liên kết thanh không gian

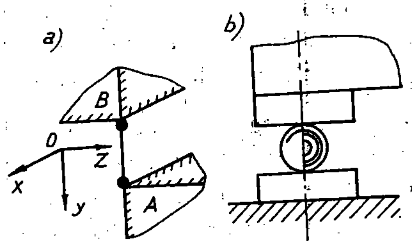
Liên kết thanh không gian (hình 8.1a) được cấu tạo từ một thanh (hoặc một vật thể) có khớp cầu lý tưởng ở hai đầu. Để phân biệt với khớp phẳng (khớp bản lê hình trụ) đã được ký hiệu bằng khuyên tròn màu trắng, ta sẽ ký hiệu khớp cầu bằng khuyên tròn màu đen.

Liên kết thanh khử được chuyển vị thẳng theo phương trục thanh của vật thể B so với vật thể A xem như cố định, tức là khử được một bậc tự do. Liên kết thanh vẫn cho phép vật thể B chuyển vị thẳng trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh (hai bậc tự do) và quay được quanh ba trục bất kỳ (ba bậc tự do).

Trong liên kết thanh phát sinh một phản lực dọc theo trục thanh.

Liên kết thanh là một khái niệm mở rộng của gối khớp cầu di động (hình 8.1b) thường dùng để nối một vật thể với trái đất.

Liên kết thanh không gian là *liên kết cơ bản* bởi vì, như ta sẽ thấy, tất cả các liên kết khác đều có thể quy về thành một tập hợp các liên kết thanh.

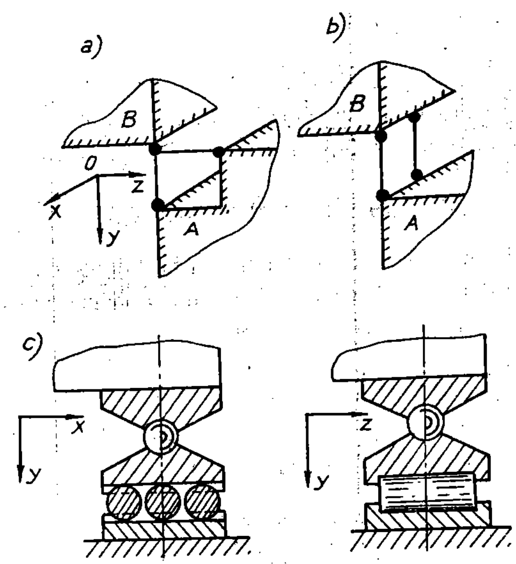


Hình 8.1

2. Liên kết cấu tạo bởi hai liên kết thanh đồng phẳng

✦ *Trường hợp hai liên kết thanh đồng quy* (hình 8.2a):

Liên kết khử được hai bậc tự do, cho phép vật thể chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với mặt phẳng hai liên kết thanh và xoay được quanh ba trục bất kỳ. Trong liên kết phát sinh phản lực nằm trong mặt phẳng của hai liên kết thanh và đi qua khớp chung. Vì phản lực có phương chưa biết nên thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương nào đó, chẳng hạn theo phương z và y trên hình 8.2a.



Hình 8.2

Hai liên kết thanh đồng quy tương đương với gối khớp cầu đặt trên con lăn hình trụ (hình 8.2c).

✦ *Trường hợp hai liên kết thanh song song* (hình 8.2b):

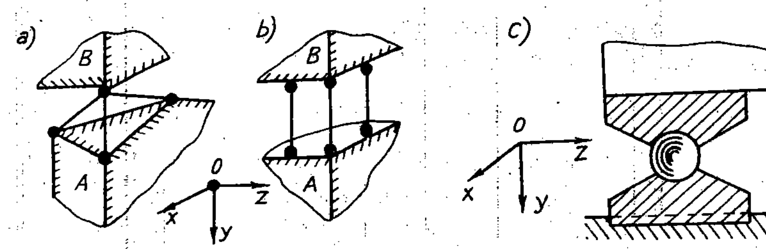
Liên kết khử được chuyển vị thẳng của vật thể dọc theo trục của hai liên kết thanh và khử được chuyển vị xoay trong mặt phẳng của chúng tức là khử được hai bậc tự do. Liên kết cho phép vật thể chuyển vị thẳng theo hai phương vuông góc với trục của hai liên kết thanh và chuyển vị xoay xung quanh hai trục song song với mặt phẳng của hai liên kết thanh, tức là trục x và y trên hình 8.2b. Trong liên kết phát sinh một phản lực có phương song song với trục của hai liên kết thanh nhưng có điểm đặt chưa biết nên có thể đưa về hai thành phần: một lực song song với hai liên kết thanh có điểm đặt xác định và một mômen nằm trong mặt phẳng của hai liên kết thanh.

3. Liên kết cấu tạo bởi ba liên kết thanh không đồng phẳng

✦ *Trường hợp ba liên kết thanh không đồng phẳng, đồng quy* (hình 8.3a):

Liên kết khử được ba chuyển vị thẳng của vật thể tức là khử được ba bậc tự do, nhưng cho phép vật thể xoay được quanh ba trục bất kỳ đi qua khớp chung. Trong liên kết phát sinh phản lực đi qua khớp chung nhưng có phương bất kỳ nên được phân tích thành ba thành phần theo ba phương bất kỳ.

Liên kết gồm ba liên kết thanh đồng quy không cùng trong mặt phẳng tương đương với gối khớp cầu cố định (hình 8.3c).



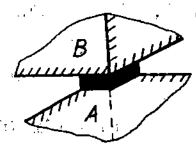
Hình 8.3

✦ *Trường hợp ba liên kết thanh không đồng phẳng, song song* (hình 8.3b):

Liên kết khử được chuyển vị thẳng của vật thể dọc theo trục của các liên kết thanh và hai chuyển vị xoay trong hai mặt phẳng tạo thành bởi ba liên kết thanh song song (hai mặt phẳng Ozy và Oxy trên hình 8.3b) tức là khử được ba bậc tự do. Vật thể còn lại ba bậc tự do là hai chuyển vị thẳng trong mặt phẳng vuông góc với trục của liên kết thanh và một chuyển vị xoay xung quanh trục song song với các liên kết thanh (trục y trên hình 8.3b). Trong liên kết phát sinh một phản lực có phương song song với trục của các liên kết thanh nhưng có điểm đặt chưa biết. Có thể đưa phản lực này về một điểm xác định nào đó, ta sẽ được ba thành phần phản lực: một thành phần lực song song với trục các liên kết thanh đặt tại điểm xác định và hai thành phần mômen trong hai mặt phẳng tạo thành bởi ba liên kết thanh song song.

4. Liên kết hàn hay gọi là mối hàn

Liên kết hàn (hình 8.4) khử được toàn bộ sáu bậc tự do của vật thể trong không gian. Trong liên kết phát sinh một phản lực có phương và điểm đặt chưa biết.



Hình 8.4

Có thể đưa phản lực này về một điểm xác định nào đó ta sẽ được sáu thành phần: ba thành phần lực đặt tại điểm xác định hướng theo ba trục của hệ tọa độ bất kỳ trong không gian và ba thành phần mômen xung quanh ba trục của hệ tọa độ đó.

Như vậy, một liên kết hàn không gian tương đương với sáu liên kết thanh nếu chúng được bố trí để sao cho có thể khử được sáu bậc tự do. Khi vật thể cố định A là trái đất thì liên kết hàn được gọi là *ngàm không gian*.

Ngoài các liên kết nêu trên, người ta còn có thể cấu tạo nhiều dạng liên kết khác bằng cách tổ hợp các liên kết thanh.

Sau này, khi khảo sát mối quan hệ về số lượng giữa các vật thể và các liên kết, để cho tiện lợi ta sẽ quy đổi các liên kết về liên kết thanh.

B. Liên kết phức tạp

Trong thực tế có thể gặp trường hợp liên kết hàn hoặc liên kết khớp cầu (hai thanh đồng phẳng, đồng quy hoặc ba thanh không đồng phẳng, đồng quy) đồng thời cùng nối nhiều vật thể (từ ba vật thể trở lên) với nhau thì liên kết đó được gọi là liên kết *phức tạp*.

Tương tự như trong hệ phẳng, ta gọi *độ phức tạp của liên kết phức tạp là số liên kết đơn giản cùng loại tương đương với liên kết phức tạp đó.*

Độ phức tạp của liên kết phức tạp được xác định theo công thức:

$$p = V - 1, \qquad (8.1)$$

trong đó:

p – độ phức tạp;

V – số vật thể quy tụ vào liên kết phức tạp.

8.2. Cách nối các vật thể thành một hệ không gian bất biến hình

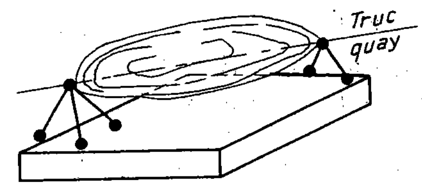
Tương tự như trong bài toán phẳng, khi khảo sát sự cấu tạo hình học ta cần lần lượt xét điều kiện cần và điều kiện đủ.

A. Điều kiện cần

1. Hệ bất kỳ

Giả sử hệ không gian được cấu tạo bởi V vật thể, trong số đó có V_1 vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu và được nối với nhau bằng các liên kết quy về T liên kết thanh.

Chú ý là một vật thể bất kỳ trong không gian có sáu bậc tự do. Một vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu (hình 8.5) có thể quay xung quanh trục đi qua hai khớp cầu, chuyển động quay đó không ảnh hưởng gì đến sự cấu tạo chung của toàn hệ nên không nhất thiết phải khử. Do đó, vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu có năm bậc tự do.



Hình 8.5

Nếu quy ước chọn một vật thể làm vật thể bất động thì muốn nối các vật thể còn lại vào vật thể bất động ta cần phải khử được $6(V-1-V_1) + 5V_1 = 6(V-1) - V_1$ bậc tự do. Đó là yêu cầu.

Về khả năng, hệ có số liên kết tương đương với T liên kết thanh nên có thể khử được T bậc tự do.

Cũng lập luận tương tự như ở chương 1, sau khi so sánh số bậc tự do có thể khử được (khả năng) với số bậc tự do cần khử (yêu cầu) ta có điều kiện cần:

$$\boxed{n = T - 6(V-1) + V_1 \geq 0.} \qquad (8.2)$$

❖ Nếu $n = 0$: hệ đủ liên kết và có khả năng bất biến hình nên cần xét điều kiện đủ. Nếu điều kiện đủ thỏa mãn thì hệ là tĩnh định.

❖ Nếu $n > 0$: hệ thừa liên kết và có khả năng bất biến hình nên cần xét điều kiện đủ. Nếu điều kiện đủ thỏa mãn thì hệ là siêu tĩnh.

Để cho đơn giản, trong nhiều trường hợp, ta có thể xem vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu như là một liên kết thanh.

2. Hệ nối với đất

Giả sử hệ không gian đang xét có V vật thể, trong số đó có V_1 vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu, được nối với nhau bằng các liên kết quy về T liên kết thanh và nối với đất bằng các liên kết tựa tương đương C liên kết thanh.

Coi trái đất là vật thể bất động, muốn nối các vật thể đó với nhau và nối với trái đất ta cần phải khử được $6(V-V_1)+5V_1 = 6V-V_1$ bậc tự do.

Xét về khả năng, số bậc tự do có thể khử được là $T+C$.

So sánh số bậc tự do có thể khử được với số bậc tự do cần khử ta suy ra điều kiện cần:

$$\boxed{n = T+ C - 6V+V_1 \geq 0.} \tag{8.3}$$

Ý nghĩa của công thức này cũng tương tự như của (8.2).

3. Hệ dàn không gian

Dàn không gian là hệ được cấu tạo bởi các thanh thẳng, hai đầu có khớp cầu.

Có thể dùng công thức (8.2) và (8.3) để khảo sát điều kiện cần của hệ dàn nhưng khi đó cần phải chú ý đến độ phức tạp của các liên kết khớp cầu. Để thuận tiện cho việc áp dụng ta sẽ thiết lập điều kiện cần riêng cho hệ dàn.

✦ *Dàn không nối với trái đất.* Giả sử trong hệ có T thanh, M mắt. Quan niệm một tam giác khớp của hệ là vật thể bất động, như vậy trong hệ còn lại $M-3$ mắt cần nối vào vật thể bất động và có $T-3$ thanh để nối. Trong không gian, mỗi điểm (mắt) có ba bậc tự do nên số bậc tự do cần khử là $3(M-3)$. Số bậc tự do có thể khử được là $T-3$. So sánh các số liệu này ta suy ra điều kiện cần:

$$n = T- 3(M-3) \geq 0,$$

hay

$$\boxed{n = T+ 6 - 3M \geq 0.} \tag{8.4}$$

Ý nghĩa của công thức này tương tự như của (8.2).

✦ *Dàn nối với trái đất.* Giả sử trong hệ có T thanh, M mắt và được nối với đất bằng các liên kết tựa tương đương C liên kết thanh. Coi trái đất là vật thể bất động và cần nối M mắt vào vật thể đó. Số bậc tự do cần phải khử là $3M$ còn số bậc tự do có thể khử được là $T+C$. Sau khi so sánh các số liệu này ta suy ra điều kiện cần

$$\boxed{n = T+ C - 3M \geq 0.} \tag{8.5}$$

Ý nghĩa của công thức này cũng tương tự như của (8.2).

B. Điều kiện đủ

Sau khi điều kiện cần được thỏa mãn, ta xét điều kiện đủ.

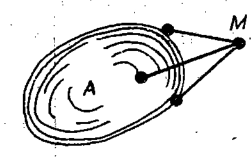
Điều kiện đủ để nối các vật thể thành một hệ bất biến hình là các liên kết phải được bố trí hợp lý.

Để xác nhận khả năng bố trí hợp lý của các liên kết, ta lần lượt khảo sát một số trường hợp sau:

1. Cách nối một mắt vào một vật thể

Xét vật thể A, giả sử cần nối mắt M vào vật thể A (hình 8.6) để tạo thành hệ bất biến hình.

Theo điều kiện cần, muốn nối mắt M vào vật thể A cần phải khử được ba bậc tự do tức là phải dùng ba liên kết thanh. Điều kiện đủ là *ba thanh không được đồng phẳng*. Thật vậy, nếu ba thanh đồng phẳng thì ba thanh đó không có khả năng ngăn cản được chuyển vị của mắt M theo phương vuông góc với mặt phẳng đó.



Hình 8.6

Ba thanh không đồng phẳng để nối một mắt vào một vật thể được gọi là bộ ba.

Tương tự như bộ đôi trong bài toán phẳng, bộ ba trong bài toán không gian có tính chất sau:

Bộ ba không làm thay đổi tính chất động học của hệ.

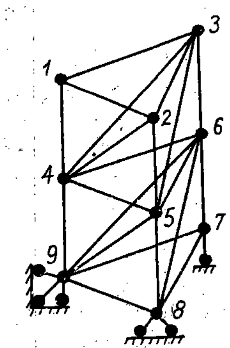
Như vậy, có thể vận dụng tính chất này để phát triển hoặc thu hẹp hệ khảo sát.

Ví dụ 8.1. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 8.7.

Hệ đã cho thuộc loại hệ dàn nối với đất, trong đó $T = 21$; $M = 9$; $C = 6$. Theo (8.4):

$n = 21+6-3.9 = 0$, hệ đủ liên kết.

Để xét điều kiện đủ ta sử dụng tính chất của bộ ba, thu hẹp dần hệ khảo sát. Loại khỏi hệ bộ ba gồm ba thanh không đồng phẳng quy tụ tại mắt 1. Hệ còn lại vẫn không thay đổi tính chất động học. Trong hệ này, tại mắt 2 chỉ còn lại ba thanh không đồng phẳng tức là bộ ba. Loại bỏ bộ ba quy tụ tại mắt 2 ta sẽ được hệ còn lại không thay đổi tính chất động học.



Hình 8.7

Tiếp đó, lần lượt loại bỏ các bộ ba theo thứ tự các mắt *3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*.

Cuối cùng, còn lại trái đất là hệ bất biến hình nên hệ đã cho ban đầu là bất biến hình.

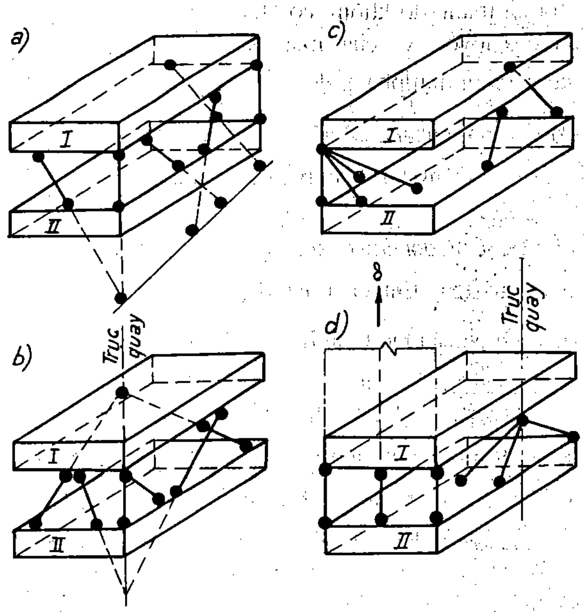
2. Cách nối hai vật thể

Theo điều kiện cần, muốn nối vật thể *I* vào vật thể *II* được xem là bất động, ta cần phải có số liên kết tương đương với sáu liên kết thanh.

Điều kiện đủ để nối hai vật thể thành một hệ bất biến hình bằng sáu liên kết thanh là các liên kết thanh đó phải được bố trí sao cho:

- ❖ *Sáu liên kết thanh không được cùng cắt một đường thẳng.*
- ❖ *Trong số sáu liên kết thanh, không được có quá ba thanh đồng quy ở một điểm.*
- ❖ *Trong số sáu liên kết thanh, không được có quá hai thanh đồng quy (hoặc song song) đồng phẳng.*

Trên hình 8.8 giới thiệu cách nối hai vật thể không thỏa mãn điều kiện đủ.



Hình 8.8

Trong trường hợp sáu liên kết thanh cùng cắt một đường (hình 8.8a và b) thì tùy theo cách sắp xếp các thanh vật thể *I* có thể quay vô cùng bé hoặc hữu hạn so với thật thể *II* xung quanh đường thẳng đó mà không có liên kết nào cản trở. Như vậy hệ sẽ biến hình tức thời hoặc biến hình.

Trong trường hợp có quá ba thanh đồng quy ở một điểm (hệ trên hình 8.8c có bốn thanh đồng quy) thì các liên kết đồng quy này chỉ có khả năng khử được tối đa ba bậc tự do. Số thanh còn lại sẽ ít hơn ba cho nên không thể khử được ba bậc tự do còn lại. Như vậy hệ sẽ biến hình.

Trong trường hợp có quá hai thanh đồng phẳng đồng quy hoặc song song, chẳng hạn có ba thanh song song như trên hình 8.8d thì ba thanh này chỉ khử được tối đa là hai bậc tự do. Số thanh còn lại ít hơn bốn bậc tự do còn lại của hệ. Như vậy hệ sẽ biến hình.

3. Trường hợp tổng quát

Trong trường hợp tổng quát, khi phân tích điều kiện đủ ta có thể vận dụng tính chất của bộ ba hoặc cách nối hai vật thể đã biết ở trên để phát triển từng vật thể đến mức tối đa cho phép. Nhờ vậy ta có thể đưa hệ có nhiều vật thể về hệ có số vật thể ít hơn.

- ❖ Nếu đưa về một vật thể thì kết luận hệ đã cho là bất biến hình.
- ❖ Nếu đưa về hai vật thể thì vận dụng điều kiện nối hai vật thể đã xét ở trên để phân tích.

Nói chung, phần lớn các hệ không gian gặp trong thực tế đều có thể dùng biện pháp nói trên để phân tích sự cấu tạo hình học. Trong trường hợp không vận dụng được biện pháp trên, ta áp dụng các phương pháp khác để phân tích, chẳng hạn phương pháp tải trọng bằng không đã nghiên cứu trong chương 2.

Cũng như trong bài toán phẳng, *tiêu chí của phương pháp tải trọng bằng không trong bài toán không gian* được phát biểu như sau:

Khi không có tải trọng tác dụng trên hệ:

- ❖ *nếu phản lực và nội lực trong toàn bộ hệ đều duy nhất bằng không thì hệ là bất biến hình.*
- ❖ *nếu phản lực và nội lực trong toàn bộ hệ hoặc trong một bộ phận nào đó của hệ là vô định thì hệ không bất biến hình.*

Phương pháp này đơn giản và có hiệu quả khi áp dụng để phân tích sự cấu tạo của các hệ dàn không gian. Trong mục 8.3 dưới đây, sau khi nghiên cứu cách xác định nội lực trong hệ không gian ta sẽ tìm hiểu cách vận dụng phương pháp này (xem ví dụ 8.4).

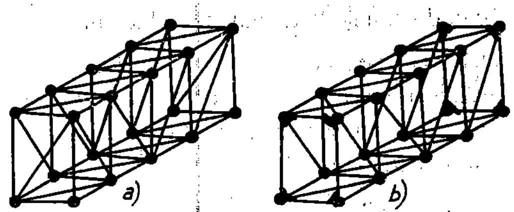
Trong thực tế người ta cũng áp dụng khá phổ biến những hệ dàn không gian gọi là *dàn lưới*.

Dàn lưới là dàn không gian được hình thành theo các đa diện lồi khép kín, các thanh đều nằm trong các mặt biên, mỗi mặt biên là một hệ phẳng bất biến hình.

Năm 1813, A.L. Cauchy (1789 – 1857) đã chứng minh:

Các loại dàn lưới thỏa mãn định nghĩa nói trên đều là những hệ bất biến hình.

Hình 8.9



Dựa vào kết luận của Cauchy ta dễ dàng phân tích được sự cấu tạo của các hệ dàn không gian. Ví dụ, hệ dàn cầu có đường xe chạy trên (hình 8.9a) được hình thành theo đa diện lồi có sáu mặt biên: hai mặt đứng theo phương dọc cầu là bộ phận chịu lực chính, hai mặt ngang là bộ phận giằng chịu lực gió còn hai mặt đứng ngang cầu là bộ phận chống xoắn. Các mặt biên đều bất biến hình nên hệ này là hệ dàn lưới và bất biến hình. Trong hệ dàn cầu có đường xe chạy dưới (hình 8.9b) người ta thay hai mặt biên ngang cầu bằng hai cổng cầu dưới dạng khung. Hệ này cũng là bất biến hình thừa liên kết tức là siêu tĩnh.

8.3. Cách xác định phản lực và nội lực trong hệ không gian tĩnh định

Về nguyên tắc, phương pháp xác định phản lực và nội lực trong hệ không gian cũng giống như trong hệ phẳng nhưng có phần phức tạp hơn. Trong mục này ta chỉ nghiên cứu cách tính hệ không gian chịu tải trọng bất động. Sau khi biết cách tính với tải trọng bất động ta có thể dễ dàng tính được hệ không gian chịu tải trọng di động theo nguyên tắc đã biết trong chương 3.

Nếu hệ không gian là bất biến hình và tĩnh định thì có thể vận dụng phương pháp mặt cắt và chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học cũng đủ để xác định phản lực và nội lực trong hệ. Tại mỗi mặt cắt ta có thể lập được sáu phương trình cân bằng. Các phương trình này thường được biểu thị theo nhiều nhóm khác nhau, trong số đó có hai nhóm thường được ưa dùng:

1) Ba phương trình hình chiếu lên ba trục X, Y, Z và ba phương trình mômen đối với ba trục x, y, z:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0; \quad \Sigma M_x = 0; \quad \Sigma M_y = 0; \quad \Sigma M_z = 0,$$

X, Y, Z là ba trục bất kỳ trong không gian miễn là không song song hoặc cùng đồng phẳng, các trục lấy mômen x, y, z không nhất thiết phải trùng với các trục chiếu X, Y, Z, có thể lấy bất kỳ miễn là chúng không song song hoặc cùng đồng phẳng.

2) Sáu phương trình cân bằng mômen đối với sáu trục

$$\Sigma M_1 = 0; \quad \Sigma M_2 = 0; \quad \Sigma M_3 = 0; \quad \Sigma M_4 = 0; \quad \Sigma M_5 = 0; \quad \Sigma M_6 = 0,$$

trong đó *1, 2, 3, 4, 5, 6* là sáu trục chọn tùy ý với điều kiện:

- Sáu trục không được cùng cắt một đường thẳng.
- Trong số sáu trục đó không có quá ba trục song song.
- Trong số sáu trục đó nếu đã có ba trục đồng quy tại một điểm thì ba trục còn lại không được song song.

Nếu các trục chọn không thỏa mãn các điều kiện nêu trên thì có thể xảy ra trường hợp phương trình cân bằng thỏa mãn nhưng vật thể vẫn không nằm trong trạng thái cân bằng.

Trong các bài toán cụ thể, ta cần vận dụng linh hoạt các phương trình cân bằng để xác định phản lực trong các liên kết nối với đất, tiếp đó xác định nội lực trong hệ.

Dưới đây ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn về cách xác định nội lực trong hệ không gian.

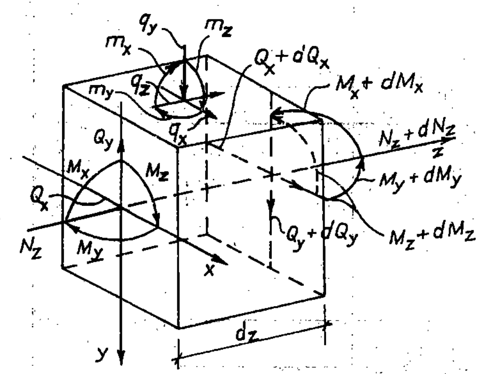
A. Hệ không gian bất kỳ

Trong trường hợp tổng quát, nội lực tại một tiết diện trong hệ không gian bao gồm sáu thành phần (hình 8.10):

- Mômen uốn xung quanh trục x: M_x.
- Mômen uốn xung quanh trục y: M_y.
- Mômen xoắn xung quanh trục z: M_z.
- Lực cắt theo phương trục x: Q_x.
- Lực cắt theo phương trục y: Q_y.
- Lực dọc theo phương trục z: N_z.

Các trục x, y là hệ trục quán tính chính trung tâm của tiết diện, còn trục z hướng theo phương tiếp tuyến với trục thanh

Khi xác định nội lực tại tiết diện bất kỳ k, ta cần thực hiện mặt cắt qua tiết diện k. Mặt cắt phải chia hệ thành hai phần riêng biệt: phần trái và phần phải.



Hình 8.10

Lấy tổng mômen của các lực tác dụng trên phần trái (hoặc phần phải) đối với trục x, y và z lần lượt ta sẽ được giá trị của M_x, M_y và M_z.

Lấy tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần trái (hoặc phần phải) lên các trục x, y, z lần lượt ta sẽ được giá trị của Q_x, Q_y và N_z.

Chiều dương của các thành phần nội lực quy ước chọn như trên hình 8.10.

Nếu gọi q_y, q_x, q_z, m_x, m_y, m_z là cường độ của các ngoại lực tác dụng dưới dạng lực phân bố và mômen phân bố thì giữa các đại lượng này và các thành phần nội lực có sự liên hệ vi phân như sau:

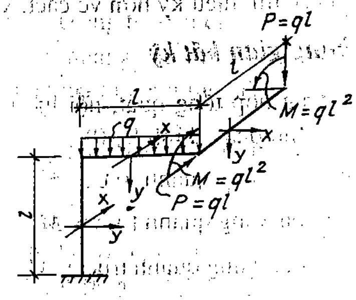
$$\frac{dQ_x}{dz} + q_x = 0; \qquad \frac{dQ_y}{dz} + q_y = 0; \qquad \frac{dN_z}{dz} + q_z = 0;$$
$$\frac{dM_x}{dz} - Q_y - m_x = 0; \qquad \frac{dM_y}{dz} - Q_x - m_y = 0; \qquad \frac{dM_z}{dz} - m_z = 0; \qquad (8.6)$$

Khi vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ không gian ta cũng thực hiện theo những nguyên tắc đã biết trong Sức bền vật liệu. Tuy nhiên, căn cứ vào các liên hệ vi phân (8.6) ta có thể suy ra các nhận xét để vẽ nhanh các biểu đồ nội lực tương tự như đã trình bày trong chương 2.

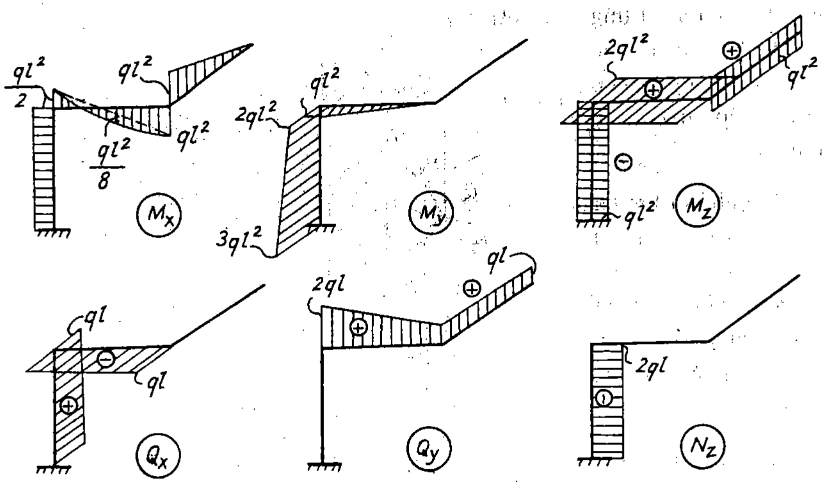
Ta sẽ ôn lại cách vẽ biểu đồ qua ví dụ 8.2 dưới đây.

Ví dụ 8.2. Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung không gian chịu tải trọng như trên hình 8.11.

Kết quả tìm được như trên hình 8.12.



Hình 8.11



Hình 8.12

B. Hệ dàn không gian

Để xác định nội lực trong hệ dàn không gian ta có thể vận dụng các phương pháp đã quen biết trong chương 2 như phương pháp mặt cắt đơn giản, phương pháp mặt cắt phối hợp hay phương pháp tách mắt.

Nếu thực hiện được mặt cắt không quá sáu thanh chưa biết nội lực thì có thể sử dụng phương pháp mặt cắt đơn giản. Với mỗi mặt cắt, nếu vận dụng khéo léo các phương trình cân bằng thì có thể xác định được nội lực trong các thanh bị cắt theo sáu phương trình trong đó có nhiều phương trình độc lập.

Nếu chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua hơn sáu thanh chưa biết nội lực mới chia hệ thành hai phần độc lập thì nói chung với một mặt cắt ta không thể xác định ngay được các nội lực đó. Trong trường hợp này cần áp dụng phương pháp mặt cắt phối hợp. Nguyên tắc thực hiện cũng tương tự như trong bài toán phẳng.

Trong thực hành, phương pháp tách mắt thường được ưa dùng khi tính hệ dàn không gian. Theo phương pháp này ta tách từng mắt của dàn để khảo sát cân bằng. Ứng với mỗi mắt của dàn ta lập được ba phương trình cân bằng độc lập. Vì hệ là tĩnh định nên số phương trình cân bằng độc lập tìm được sẽ vừa đủ để xác định số nội lực cần tìm trong hệ.

Để giảm nhẹ khối lượng giải hệ phương trình, khi sử dụng phương pháp tách mắt ta cần chú ý:

✦ Nên lần lượt tách các mắt theo thứ tự để sao cho tại mỗi mắt chỉ có ba thanh không đồng phẳng chưa biết nội lực. Lúc này tại mỗi mắt ta sẽ lập được ba phương trình cân bằng chỉ chứa ba nội lực chưa biết nên có thể xác định ngay được các nội lực đó.

✦ Khi khảo sát cân bằng của mỗi mắt, muốn tìm ngay được nội lực chưa biết trong thanh thứ nhất ta nên dùng phương trình cân bằng hình chiếu lên trục vuông góc với hai thanh còn lại chưa biết nội lực hoặc dùng phương trình cân bằng mômen đối với trục không đi qua mắt nhưng cắt qua hai thanh còn lại chưa biết nội lực. Với cách làm như vậy sẽ không phải giải hệ phương trình.

Ngoài ra, từ phương pháp tách mắt ta suy ra hai nhận xét sau:

❋ *Nếu tại mắt có ba thanh không đồng phẳng quy tụ và không có tải trọng đặt ở mắt thì lực dọc trong tất cả ba thanh đó đều bằng không.*

❋ *Nếu tại mắt có n thanh quy tụ, trong đó n-1 thanh nằm trong cùng một mặt phẳng thì lực dọc trong thanh còn lại bằng không khi ở mắt không có tải trọng tác dụng hoặc khi tải trọng tác dụng trong mặt phẳng của n-1 thanh kể trên.*

Với hai nhận xét đó ta có thể dễ phát hiện những thanh có nội lực bằng không. Sau khi loại bỏ các thanh có nội lực bằng không, sơ đồ tính của hệ sẽ đơn giản hơn, tạo điều kiện thuận lợi cho việc xác định nội lực trong các thanh còn lại.

Ví dụ 8.3. Xác định nội lực trong các thanh của dàn không gian trên hình 8.13 khi dàn chịu lực $P=100$ kN nằm trong mặt phẳng $1-3-7-5$, vuông góc với trục z.

Chọn hệ trục tọa độ như trên hình vẽ và gọi x, y, z là hình chiếu của các thanh đang xét lên các trục tương ứng. Chiều dài l và cosin chỉ phương của từng thanh trong dàn được xác định theo các công thức quen biết trong Hình học giải tích.

$$l=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ; \quad cos(\bar{x},\bar{l})=\frac{x}{l};\quad cos(\bar{y},\bar{l})=\frac{y}{l};\quad cos(\bar{z},\bar{l})=\frac{z}{l}.$$

Để xác định nội lực trong các thanh của dàn không gian ta vận dụng phương pháp tách mắt, bắt đầu tách từ mắt 9 có ba ẩn số. Để cho tiện lợi và đỡ nhầm lẫn ta lập bảng tính (bảng 8.1).

Tách mắt 9, giả thiết nội lực tác dụng trong các thanh quy tụ vào mắt đều là lực kéo và viết phương trình cân bằng hình chiếu các lực lên ba trục, ta có:

$$\Sigma X= S_{9-6}\,cos(\bar{x},\bar{l}_{9-6})+S_{9-8}\,cos(\bar{x},\bar{l}_{9-8})+S_{9-7}\,cos(\bar{x},\bar{l}_{9-7})+P\,cos(\bar{x},\bar{P})=0\,;$$

$$\Sigma Y= S_{9-6}\,cos(\bar{y},\bar{l}_{9-6})+S_{9-8}\,cos(\bar{y},\bar{l}_{9-8})+S_{9-7}\,cos(\bar{y},\bar{l}_{9-7})+P\,cos(\bar{y},\bar{P})=0\,;$$

$$\Sigma Z= S_{9-6}\,cos(\bar{z},\bar{l}_{9-6})+S_{9-8}\,cos(\bar{z},\bar{l}_{9-8})+S_{9-7}\,cos(\bar{z},\bar{l}_{9-7})+P\,cos(\bar{z},\bar{P})=0\,.$$

- *Thanh 9–6:* Độ dài các hình chiếu lên các trục tọa độ lần lượt là:

  $x=-2;\quad y=2;\quad z=-5$ nên

  $$l_{9-6}=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-5)^2}=5,75\text{ m}.$$

  Các cosin chỉ phương của thanh $9-6$:

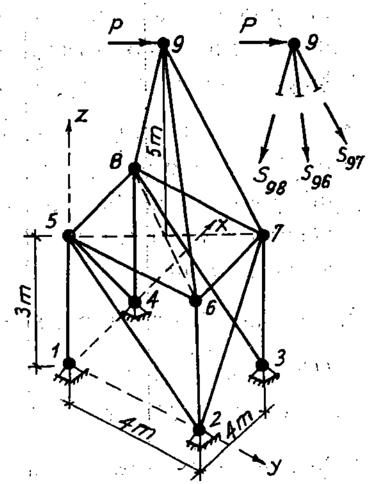
  $$cos(\bar{x},\bar{l}_{9-6})=\frac{x}{l_{9-6}}=\frac{-2}{5,75}=-0,348;$$

  $$cos(\bar{y},\bar{l}_{9-6})=\frac{y}{l_{9-6}}=\frac{2}{5,75}=0,348;$$

  $$cos(\bar{z},\bar{l}_{9-6})=\frac{z}{l_{9-6}}=\frac{-5}{5,75}=-0,87.$$

- *Thanh 9–8:* Từ hình 8.13 ta thấy các hình chiếu lên ba trục tọa độ của thanh lần lượt là $x=2;\ y=-2;\ z=-5$.

  Do đó:



Hình 8.13

$$l_{9-8}=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-5)^2}=5,75\text{ m};\quad cos(\bar{x},\bar{l}_{9-8})=\frac{x}{l_{9-8}}=\frac{2}{5,75}=0,348;$$

$$cos(\bar{y},\bar{l}_{9-8})=\frac{y}{l_{9-8}}=\frac{-2}{5,75}=-0,348;\qquad cos(\bar{z},\bar{l}_{9-8})=\frac{z}{l_{9-8}}=\frac{-5}{5,75}=-0,87.$$

- *Thanh 9–7:* Cũng thực hiện tương tự, ta được:

  $$cos(\bar{x},\bar{l}_{9-7})=0,348;\quad cos(\bar{y},\bar{l}_{9-7})=0,348;\quad cos(\bar{z},\bar{l}_{9-7})=-0,87.$$

- *Lực P:* Các cosin chỉ phương:

  $$cos(\bar{x},\bar{P})=cos\,45^o=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad cos(\bar{y},\bar{P})=cos\,45^o=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad cos(\bar{z},\bar{P})=0\,.$$

Bảng 8.1

Thanh	Hình chiếu lên			x^2	y^2	z^2	l	Cosin chỉ phương của thanh			Nội lực
	x	y	z				(m)	$cos(\bar{x},\bar{l})$	$cos(\bar{y},\bar{l})$	$cos(\bar{z},\bar{l})$	(kN)
9-6	-2	2	-5	4	4	25	5,75	-0,348	0,348	-0,870	101,5
9-8	2	-2	-5	4	4	25	5,75	0,348	-0,348	-0,870	101,5
9-7	2	2	-5	4	4	25	5,75	0,348	0,348	-0,870	-203,0
6-5	0	-4	0	0	16	0	4,00	0,000	-1,000	0,000	-35,4
6-7	4	0	0	16	0	0	4,00	1,000	0,000	0,000	-35,4
6-2	0	0	-3	0	0	9	3,00	0,000	0,000	-1,000	88,4
7-8	0	-4	0	0	16	0	4,00	0,000	-1,000	0,000	70,7
7-2	-4	0	-3	16	0	9	5,00	-0,800	0,000	-0,600	-132,5
7-3	0	0	-3	0	0	9	3,00	0,000	0,000	-1,000	-256,3
8-5	-4	0	0	16	0	0	4,00	-1,000	0,000	0,000	-35,3
8-4	0	0	-3	0	0	9	3,00	0,000	0,000	-1,000	167,8
8-3	0	4	-3	0	16	9	5,00	0,000	0,800	-0,600	-132,6
5-4	4	0	-3	16	0	9	5,00	0,800	0,000	-0,600	44,1
5-1	0	0	-3	0	0	9	3,00	0,000	0,000	-1,000	-52,8
5-2	0	4	-3	0	16	9	5,00	0,000	0,800	-0,600	44,1

Thay các trị số vừa tính được vào hệ ba phương trình cân bằng của mắt 9 ta có:

$$\Sigma X = S_{9-6}(-0,348) + S_{9-8}(0,348) + S_{9-7}(0,348) + 100\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 0\,;$$

$$\sum Y = S_{9-6}(0{,}348) + S_{9-8}(-0{,}348) + S_{9-7}(0{,}348) + 100 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0\,;$$

$$\sum Z = S_{9-6}(-0{,}87) + S_{9-8}(-0{,}87) + S_{9-7}(-0{,}87) = 0\,.$$

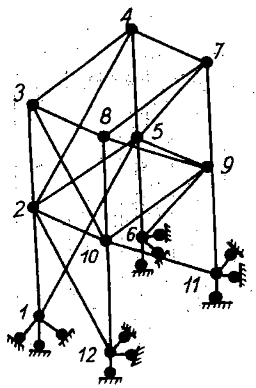
Từ đó suy ra:

$$S_{9-6} = 101{,}5 \text{ kN}; \quad S_{9-8} = 101{,}5 \text{ kN}; \quad S_{9-7} = -203 \text{ kN}.$$

Các dấu tìm được chứng tỏ nội lực trong thanh $9-6$ và $9-8$ phù hợp với chiều giả thiết (lực kéo) còn nội lực trong thanh $9-7$ ngược với chiều giả thiết (lực nén).

Sau khi tách mắt 9 ta chuyển sang tách mắt 6, lúc đó chỉ còn ba ẩn.

Quá trình tính toán được tiếp tục thực hiện trên bảng 8.1. Cũng lần lượt thực hiện như thế với các mắt *7, 8, 5* ta sẽ có được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.



Hình 8.14

Ví dụ 8.4. Vận dụng phương pháp tải trọng bằng không để xét cấu tạo hình học của hệ trên hình 8.14.

Đối với hệ đã cho, ta có: $M = 12$; $C = 12$; $T = 24$. Theo (8.5) ta thấy:

$$n = 24 + 12 - 3.12 = 0.$$

Vậy hệ đủ liên kết.

Để khảo sát điều kiện đủ, trước tiên ta xét mắt 8 và thấy ngay nội lực trong thanh $3-8$ bằng không (mắt 8 có bốn thanh trong đó có ba thanh đồng phẳng cho nên khi mắt không chịu lực thì thanh $3-8$ không cùng trong mặt phẳng của ba thanh nói trên sẽ có nội lực bằng không). Tiếp đó, lần lượt xét các mắt *3, 4, 7* của hệ, ta thấy tại mỗi mắt này (sau khi đã loại bỏ các thanh có nội lực bằng không) chỉ có ba thanh đồng quy không đồng phẳng và không chịu tải trọng nên nội lực trong tất cả các thanh quy tụ vào các mắt *3, 4, 7* đều bằng không. Chuyển sang mắt 10, sau khi đã loại bỏ các thanh có nội lực bằng không, ta thấy mắt này còn lại bốn thanh trong đó có ba thanh đồng phẳng nên thanh không đồng phẳng $2-10$ sẽ có nội lực bằng không. Tiếp đó, lần lượt xét các mắt 2, 5, 9 ta cũng dễ dàng nhận thấy nội lực trong các thanh quy tụ vào các mắt đó đều bằng không.

Như vậy, khi dàn không chịu tải trọng, nội lực trong tất cả các thanh của dàn đều duy nhất bằng không. Kết luận: hệ bất biến hình.

Qua ví dụ này ta thấy: sử dụng phương pháp tải trọng bằng không để khảo sát cấu tạo hình học cho hệ dàn không gian rất tiện lợi.

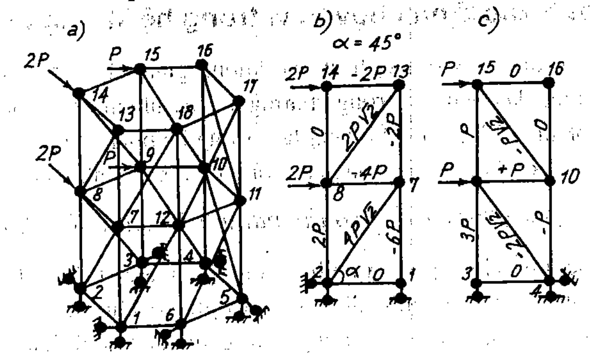
8.4. Cách phân tích dàn không gian thành những dàn phẳng

Trong trường hợp *dàn không gian gồm các dàn phẳng bất biến hình ghép lại với nhau* thì có thể tính toán đơn giản hơn bằng cách *phân tích dàn thành những dàn phẳng để tính riêng biệt.* Cách phân tích được thực hiện trên cơ sở nhận xét sau:

Trong dàn không gian, nếu tải trọng chỉ tác dụng trong mặt phẳng của một dàn phẳng bất biến hình nào đó và cân bằng với nhau hoặc cân bằng với các phản lực của hệ trong mặt phẳng đó thì nội lực chỉ phát sinh trong những thanh thuộc dàn phẳng chịu tải trọng còn các thanh khác của dàn không gian không nằm trong mặt phẳng đó sẽ có nội lực bằng không.

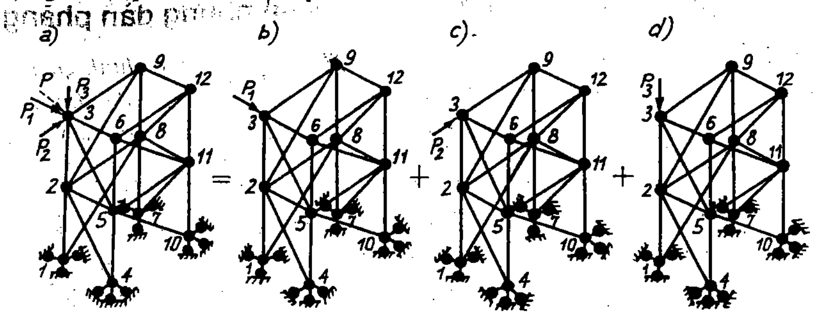
Để làm ví dụ, ta tìm hiểu cách phân tích dàn không gian trên hình 8.15a.

Hình 8.15



Dàn này có các mặt biên là những dàn phẳng bất biến hình, tải trọng tác dụng trong mặt phẳng của các dàn biên $1-2-14-13$ và $3-15-16-4$. Như vậy, để tính dàn không gian đã cho ta chỉ cần tính hai dàn phẳng độc lập. Các nội lực tìm được (ghi trên hình 8.15b và c) trong các thanh của hai dàn phẳng này cũng chính là nội lực trong các thanh tương ứng của dàn không gian. Nội lực trong các thanh khác nằm ngoài hai mặt phẳng nói trên đều bằng không.

Nếu tải trọng tác dụng trên dàn không gian có phương bất kỳ thì có thể phân tích tải trọng thành các thành phần nằm trong từng mặt phẳng để tính. Ví dụ với hệ dàn trên hình 8.16a, ta có thể phân tích lực P thành ba thành phần P_1, P_2 và P_3. Thành phần P_1 (hình 8.16b) chỉ gây ra nội lực trong dàn phẳng $1-3-6-4$ còn thành phần P_2 (hình 8.16c) chỉ gây ra nội lực trong dàn phẳng $1-3-9-7$. Thành phần P_3 (hình 8.16d) chỉ gây ra nội lực trong hai thanh $1-2$ và $2-3$. Cũng có thể xem thành phần P_3 như lực tác dụng trong dàn phẳng $1-3-6-4$ hoặc trong dàn phẳng 1, 2, 9, 7. Cuối cùng, theo nguyên lý cộng tác dụng, nội lực trong thanh bất kỳ của dàn không gian do tải trọng P gây ra là tổng các nội lực trong thanh đó do từng thành phần P_1, P_2 và P_3 tác dụng riêng rẽ gây ra.



Hình 8.16

8.5. Cách xác định chuyển vị trong hệ không gian

Cách xác định chuyển vị trong hệ không gian cũng được thực hiện theo những nguyên tắc đã trình bày trong chương 4. Tuy nhiên, trong hệ không gian có nhiều thành phần nội lực và biến dạng hơn trong hệ phẳng nên cần bổ sung các số hạng mang yếu tố không gian trong các công thức xác định chuyển vị.

1. Xác định chuyển vị theo thế năng biến dạng đàn hồi

Để xác định chuyển vị trong hệ không gian ta có thể áp dụng trực tiếp biểu thức thế năng hoặc áp dụng định lý Castigliano như đã trình bày trong mục 4.3 chương 4. Song trong hệ không gian gồm các thanh thẳng và thanh cong có độ cong nhỏ, thay thế cho công thức (4.12), ta có biểu thức thế năng biến dạng của hệ như sau:

$$U = \sum\int\frac{M_x^2 ds}{2EI_x}+\sum\int\frac{M_y^2 ds}{2EI_y}+\sum\int\frac{M_z^2 ds}{2GI_z}+$$
$$+\sum\int\frac{N_z^2 ds}{2EA}+\sum\int\nu_x\frac{Q_x^2 ds}{2GA}+\sum\int\nu_y\frac{Q_y^2 ds}{2GA}, \tag{8.7}$$

trong đó:

M_x, M_y, M_z, N_z, Q_x, Q_y – các biểu thức giải tích của các thành phần nội lực đã được giải thích trên hình 8.10;

ν_x và ν_y – các hệ số điều chỉnh kể đến sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên tiết diện, theo phương x và phương y.

I_x, I_y – mômen quán tính của tiết diện đối với các trục chính trung tâm x và y;

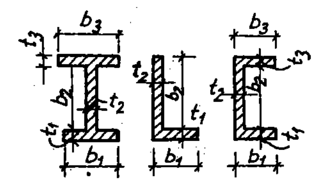
I_z – mômen quán tính của tiết diện khi xoắn được xác định như sau:

- ❖ tiết diện vuông có cạnh a: $I_z \approx 0{,}141a^4$;
- ❖ tiết diện chữ nhật có cạnh $h\times b$ với $h>b$: $I_z \approx hb^3\left[\frac{16}{3}-3{,}36\frac{b}{h}\left(1-\frac{b^4}{12h^4}\right)\right]$;
- ❖ tiết diện chữ nhật hẹp có cạnh $h\times b$ với $h>4b$: $I_z \approx \frac{b^3}{3}(h-0{,}63b)$;
- ❖ tiết diện hình tròn có bán kính r: $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$;
- ❖ tiết diện thành mỏng hở (hình 8.17), được hình thành từ n phần tử chữ nhật hẹp có các cạnh $b_i\times t_i$ với $b_i> t_i$:

$$I_z \approx \frac{1}{3}\alpha\sum_{i=1}^{n}b_i t_i^3$$

Hệ số α phụ thuộc hình dạng tiết diện:

- hình I: $\alpha = 1{,}30$;
- hình L (thép góc): $\alpha = 1{,}00$;
- hình [: $1{,}00< \alpha < 1{,}30$;
- hình +: $\alpha = 1{,}17$;



Hình 8.17

2. Xác định chuyển vị theo nguyên lý công khả dĩ

Trong trường hợp hệ thanh không gian bao gồm các thanh thẳng hoặc thanh cong có độ cong nhỏ, tương tự như đã trình bày trong mục 4-6 chương 4, ta có thể thiết lập được công thức xác định chuyển vị như sau:

$$\Delta_{km} = -\sum_j\overline{R}_{jk}Z_{jm}+\sum\int\frac{\overline{M}_{xk}M_{xm}}{EI_x}ds+\sum\int\frac{\overline{M}_{yk}M_{ym}}{EI_y}ds+\sum\int\frac{\overline{M}_{zk}M_{zm}}{GI_z}ds+$$
$$+\sum\int\frac{\overline{N}_{zk}N_{zm}}{EA}ds+\sum\int\nu_x\frac{\overline{Q}_{xk}Q_{xm}}{GA}ds+\sum\int\nu_y\frac{\overline{Q}_{yk}Q_{ym}}{GA}ds+\sum\int\overline{N}_{zk}\alpha\, t_{cm}ds+$$
$$+\sum\int\overline{M}_{xk}\frac{\alpha}{h_y}(t_{2m}-t_{1m})ds+\sum\int\overline{M}_{yk}\frac{\alpha}{h_x}(t_{3m}-t_{1m})ds. \tag{8.8}$$

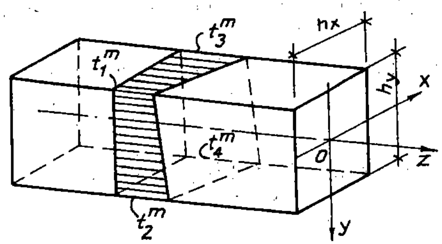
Cách vận dụng công thức chuyển vị cũng tương tự như đã trình bày trong mục 4.6 chương 4. Một số đại lượng trong (8.8) đã được giải thích ở trên, ở đây chỉ cần giải thích thêm các đại lượng sau:

$\overline{M}_{xk}$, $\overline{M}_{yk}$, $\overline{M}_{zk}$, $\overline{N}_{zk}$, $\overline{Q}_{xk}$, $\overline{Q}_{yk}$ – các biểu thức của nội lực ở trạng thái "k";

M_{xm}, M_{ym}, M_{zm}, N_{zm}, Q_{xm}, Q_{ym} – các biểu thức của nội lực ở trạng thái "m";

h_x, h_y – chiều cao của tiết diện theo phương trục x và y.

t_1^m, t_2^m, t_3^m, t_4^m – độ biến thiên nhiệt độ tại các thớ chỉ định trên hình 8.18. Vì ta giả thiết biểu đồ biến thiên nhiệt độ theo luật mặt phẳng nên giữa các đại lượng này có liên hệ như sau:



Hình 8.18

$$t_1^m + t_4^m = t_2^m + t_3^m;$$

t_c^m – độ biến thiên nhiệt độ ở trục, nếu tiết diện có hai trục đối xứng thì

$$t_c^m = (t_1^m+t_4^m)/2 = (t_2^m+t_3^m)/2.$$

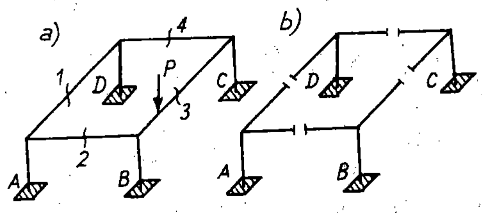
Ngoài ra cần chú ý là các định lý về năng lượng cũng như các định lý tương hỗ đã trình bày trong chương 4 đối với bài toán phẳng, vẫn nghiệm đúng với các hệ không gian.

8.6. Cách tính hệ không gian siêu tĩnh theo phương pháp lực

Để tính hệ không gian siêu tĩnh ta cũng thực hiện trên hệ cơ bản. Hệ cơ bản có thể là tĩnh định hoặc siêu tĩnh với bậc thấp hơn song phải bất biến hình và phù hợp với khả năng tính toán.

Số ẩn số của phương pháp lực được xác định theo (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), trong đó n là bậc siêu tĩnh. Khi tính các hệ đơn giản ta có thể phát hiện ngay được số ẩn số bằng cách loại trừ các liên kết thừa. Chẳng hạn, đối với hệ cho trên hình 8.19a, nếu cắt các thanh của hệ tại các tiết diện *1, 2, 3, 4* thì sẽ được một hệ tĩnh định bất biến hình (hình 8.19b). Tại mỗi mặt cắt ta loại bỏ một mối hàn tương đương với sáu liên kết thanh, do đó bậc siêu tĩnh của hệ là 6.4 = 24.

Hình 8.19



Đối với hệ siêu tĩnh có bậc là n, khi chọn hệ cơ bản tĩnh định ta có hệ n phương trình chính tắc:

$$\delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \ldots + \delta_{kk} X_k + \ldots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kP} = 0, \qquad (8.9)$$

với $k = 1, 2, \ldots, n$.

Phương trình chính tắc của hệ số và số hạng tự do vẫn có ý nghĩa vật lý như đã trình bày trong chương 5. Tuy nhiên, các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc cần được xác định theo công thức chuyển vị của hệ không gian (8.8). Ta có:

$$\delta_{km} = \sum\int \frac{\overline{M}_{xk}\overline{M}_{xm}}{EI_x}ds + \sum\int \frac{\overline{M}_{yk}\overline{M}_{ym}}{EI_y}ds + \sum\int \frac{\overline{M}_{zk}\overline{M}_{zm}}{GI_z}ds +$$
$$+\sum\int \frac{\overline{N}_k\overline{N}_m}{EA}ds + \sum\int \nu_x \frac{\overline{Q}_{xk}\overline{Q}_{xm}}{GA}ds + \sum\int \nu_y \frac{\overline{Q}_{yk}\overline{Q}_{ym}}{GA}ds; \qquad (8.10)$$

$$\Delta_{kP} = \sum\int \frac{\overline{M}_{xk}M_{xP}^o}{EI_x}ds + \sum\int \frac{\overline{M}_{yk}M_{yP}^o}{EI_y}ds + \sum\int \frac{\overline{M}_{zk}M_{zP}^o}{GI_z}ds +$$
$$+\sum\int \frac{\overline{N}_k N_P^o}{EA}ds + \sum\int \nu_x \frac{\overline{Q}_{xk}Q_{xP}^o}{GA}ds + \sum\int \nu_y \frac{\overline{Q}_{yk}Q_{yP}^o}{GA}ds. \qquad (8.11)$$

Đối với các hệ khung và dầm không gian, thường được phép bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn khi xác định chuyển vị, do đó các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc được xác định theo công thức đơn giản hơn như sau:

$$\delta_{km} = \sum\int \frac{\overline{M}_{xk}\overline{M}_{xm}}{EI_x}ds + \sum\int \frac{\overline{M}_{yk}\overline{M}_{ym}}{EI_y}ds + \sum\int \frac{\overline{M}_{zk}\overline{M}_{zm}}{GI_z}ds; \qquad (8.12)$$

$$\Delta_{kP} = \sum\int \frac{\overline{M}_{xk}M_{xP}^o}{EI_x}ds + \sum\int \frac{\overline{M}_{yk}M_{yP}^o}{EI_y}ds + \sum\int \frac{\overline{M}_{zk}M_{zP}^o}{GI_z}ds. \qquad (8.13)$$

Cũng tương tự như trong hệ phẳng, ta có thể tính các tích phân trong các công thức trên bằng cách nhân biểu đồ theo Vêrêxaghin.

Đối với hệ dàn không gian, trong đó chỉ tồn tại lực dọc, công thức xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc có dạng đơn giản hơn như sau:

$$\delta_{km} = \sum_i \overline{N}_{ik}\overline{N}_{im}\frac{l_i}{(EA)_i}; \qquad \Delta_{kP} = \sum_i \overline{N}_{ik}N_{iP}^o\frac{l_i}{(EA)_i}; \qquad (8.14)$$

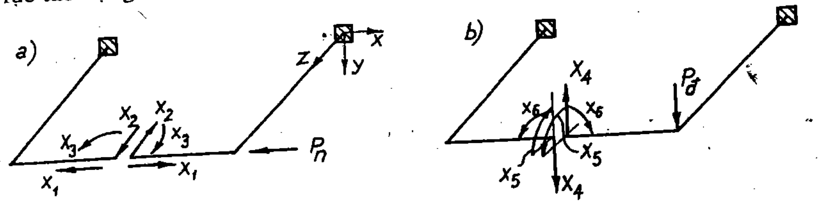
Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để tìm các ẩn X_k ta tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh không gian theo công thức quen biết sau:

$$(S) = (\overline{S}_1)X_1 + (\overline{S}_2)X_2 + \ldots + (\overline{S}_n)X_n + (S_P^o). \qquad (8.15)$$

Ý nghĩa của các đại lượng trong (8.15) đã giải thích trong mục 5.2, chương 5.

Trường hợp đặc biệt: Đối với những *hệ siêu tĩnh phẳng chịu tải trọng không gian* (không nằm trong mặt phẳng của hệ) ta có thể dựa vào những nhận xét sau để làm *đơn giản tính toán, những ẩn số nằm trong mặt phẳng của hệ chỉ gây ra chuyển vị trong mặt phẳng hệ.*

Ví dụ, với hệ cho trên hình 8.20 ta có sáu ẩn số, trong đó các ẩn số X_1, X_2, X_3 nằm trong mặt phẳng của hệ chỉ gây ra chuyển vị trong mặt phẳng hệ. Do đó, các hệ số δ_{41}, δ_{42}, δ_{43}, δ_{51}, δ_{52}, δ_{53}, δ_{61}, δ_{62}, δ_{63} biểu thị chuyển vị ngoài mặt phẳng hệ do các lực tác dụng trong mặt phẳng hệ sẽ bằng không.



Hình 8.20

Như vậy, mặc dù tải trọng tác dụng bất kỳ, bao giờ ta cũng có thể phân tích hệ phương trình chính tắc thành hai nhóm: một nhóm chỉ chứa các ẩn nằm trong mặt phẳng hệ (X_1, X_2, X_3) và một nhóm chỉ chứa các ẩn nằm ngoài mặt phẳng hệ (X_4, X_5, X_6). Khối lượng giải hệ phương trình chính tắc sẽ được giảm nhẹ rất nhiều.

Mặt khác, nếu phân tích tải trọng đã cho thành hai nhóm: nhóm tải trọng nằm trong mặt phẳng hệ và nhóm tải trọng tác dụng vuông góc với mặt phẳng hệ như trên hình 8.20a, b, thì ta thấy nhóm thứ nhất chỉ có ảnh hưởng đến các ẩn số nằm trong mặt phẳng hệ còn nhóm thứ hai chỉ có ảnh hưởng đến các ẩn số nằm ngoài mặt phẳng hệ. Nhận xét này cho phép đơn giản hóa cách tính các số hạng tự do trong hai nhóm của hệ phương trình chính tắc.

Ví dụ 8.5. Vẽ biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn cho hệ trên hình 8.21a.

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.

Cho biết: $I_y = 0{,}5I_x$; $I_z = 12(1+\mu)I_x$; $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$.

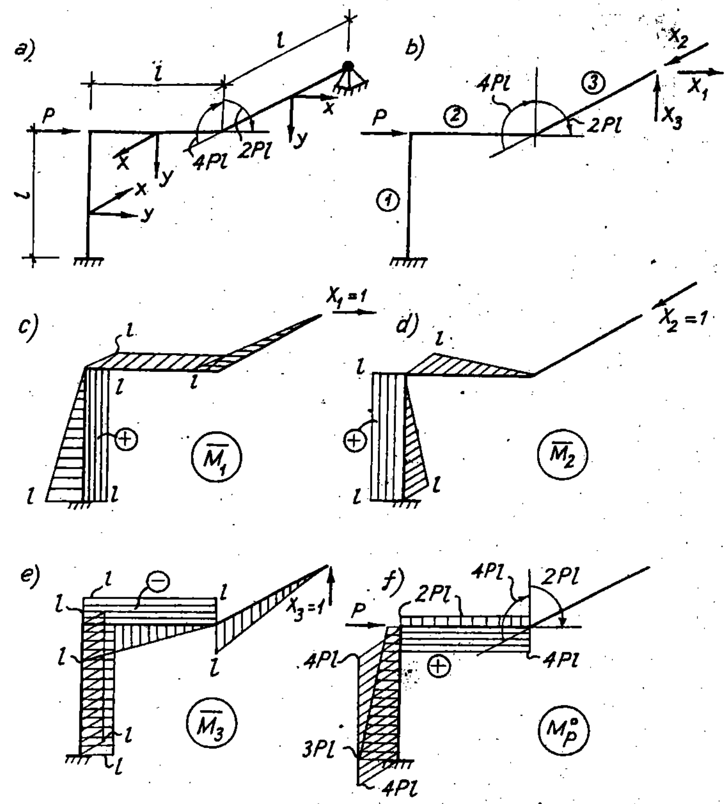
Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng ba. Chọn hệ cơ bản như trên hình 8.21b. Chiều dương của trục quán tính chính trung tâm tương ứng với mỗi thanh chọn như trên hình 8.21a. Trên các hình 8.21c, d, e, f lần lượt vẽ các biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn (biểu đồ mômen xoắn biểu thị bằng các đường kẻ song song với trục thanh) tương ứng với các nguyên nhân $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ và tải trọng.

Sau khi thực hiện các phép nhân biểu đồ, ta xác định được các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc như sau:

$$\delta_{11} = \frac{19\,l^3}{6EI_x};\qquad \delta_{22} = \frac{9\,l^3}{6EI_x};\qquad \delta_{33} = \frac{26\,l^3}{6EI_x};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7\,l^3}{6EI_x};\qquad \delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{3\,l^3}{6EI_x};\qquad \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{6\,l^3}{6EI_x};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{8Pl^3}{6EI_x};\qquad \Delta_{2P} = -\frac{24Pl^3}{6EI_x};\qquad \Delta_{3P} = -\frac{73Pl^3}{6EI_x}.$$



Hình 8.21

Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{aligned} 19X_1 + 7X_2 - 3X_3 + 8P &= 0;\\ 7X_1 + 9X_2 + 6X_3 - 24P &= 0;\\ -3X_1 + 6X_2 + 26X_3 - 73P &= 0. \end{aligned}$$

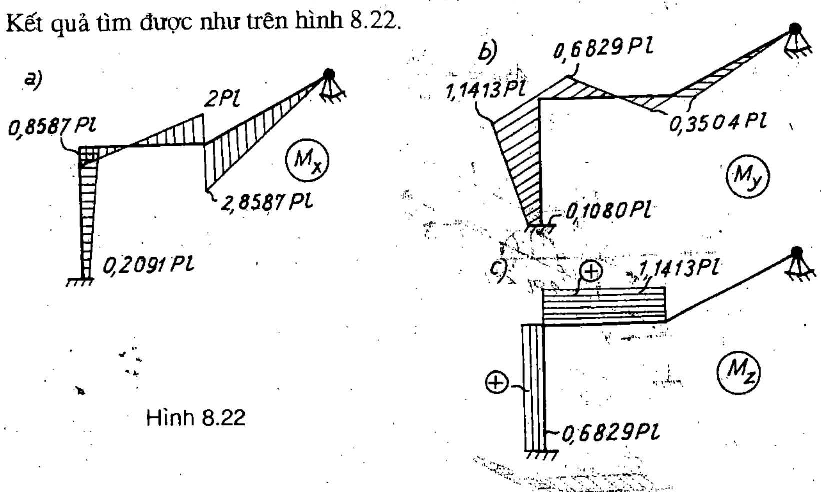
Nghiệm của hệ phương trình:

$$X_1 = -\,0{,}3504P; \quad X_2 = 1{,}0333P; \quad X_3 = 2{,}8587P.$$

Theo (8.16), các biểu đồ nội lực được xác định như sau:

$$(M) = (\overline{M}_1)X_1 + (\overline{M}_2)X_2 + (\overline{M}_3)X_3 + (M_P^o).$$

Kết quả tìm được như trên hình 8.22.



Hình 8.22

8.7. Cách tính hệ không gian siêu động theo phương pháp chuyển vị

Tương tự như trong bài toán phẳng, trước khi nghiên cứu cách tính ta cần xác định bậc siêu động của hệ. Công thức xác định bậc siêu động vẫn có dạng:

$$n = n_1 + n_2\,, \qquad (8.16)$$

trong đó:

n_1 – số chuyển vị xoay chưa biết tại các nút, mỗi nút của hệ không gian có ba chuyển vị xoay cho nên, nói chung, n_1 được tính bằng ba lần số nút của hệ;

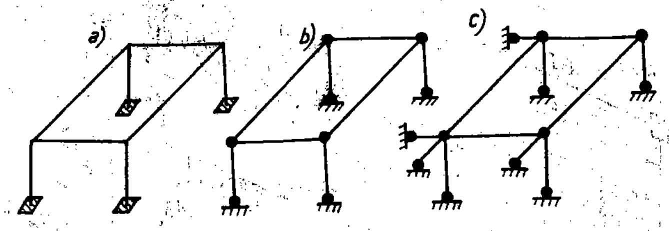
n_2 – số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết tại các nút.

Nếu chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục trong các thanh thì cũng tương tự như trong bài toán phẳng ta có thể xác định n_2 như sau: *thay các ngàm và nút của hệ bằng các khớp, ta sẽ được sơ đồ mới nói chung là biến hình, tiếp đó đặt thêm các liên kết thanh vào hệ mới để ngăn cản tất cả các chuyển vị thẳng của các nút, số liên kết tối thiểu phải đặt thêm vào hệ mới chính là số chuyển vị thẳng n_2 cần tìm.*

Chẳng hạn đối với hệ vẽ trên hình 8.23a, sau khi đặt khớp tại các nút và ngàm ta được hệ mới như trên hình 8.23b, tiếp đó ta cần đặt thêm vào hệ mới này bốn liên

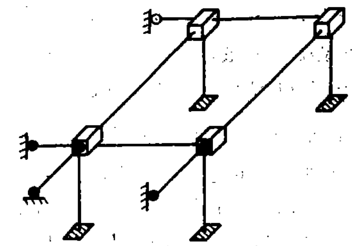
kết thanh để ngăn cản chuyển vị thẳng tại các nút như trên hình 8.23c. Như vậy số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút là 4.

Hình 8.23



Sau khi xác định bậc siêu động tức là số ẩn số của phương pháp, ta lập hệ cơ bản bằng cách đặt tại mỗi nút một liên kết mômen không gian và đặt thêm các liên kết lực (liên kết thanh) để ngăn cản tất cả các chuyển vị của các nút hệ. Mỗi liên kết mômen không gian ngăn cản được ba chuyển vị xoay quanh ba trục tọa độ, nhưng không ngăn cản được chuyển vị thẳng. Hệ vẽ trên hình 8.24 là hệ cơ bản của hệ 8.23a theo phương pháp chuyển vị.

Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ đã cho, ta cho các nút chuyển vị cưỡng bức với các giá trị để sao cho phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ phải bằng không. Điều kiện này được thể hiện qua hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:



Hình 8.24

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \ldots + r_{kk}Z_k + \ldots + r_{kn}Z_n + R_{kP} = 0, \qquad (8.17)$$

với $k = 1, 2, \ldots, n.$

Phương trình chính tắc, các hệ số và số hạng tự do vẫn có ý nghĩa vật lý như đã trình bày trong chương 6.

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta cần vẽ các biểu đồ $\overline{S}_m, S_P^o$ và vận dụng các điều kiện cân bằng nhưng cần thực hiện theo quan điểm không gian.

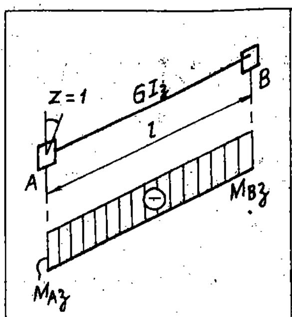
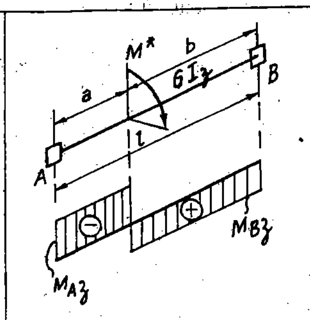
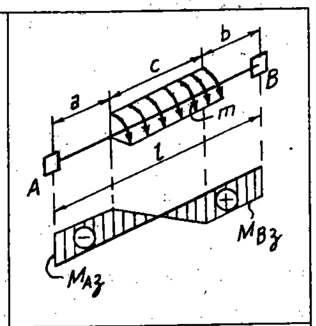
Khi vẽ các biểu đồ $\overline{S}_m, S_P^o$ ta sử dụng các số liệu đã có trong các bảng 6.1, 6.2 và các số liệu về phần tử mẫu thanh chịu các nguyên nhân gây xoắn trong bảng 8.2.

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để tìm các ẩn số Z_m, ta xác định nội lực trong hệ siêu động theo công thức quen biết sau:

$$(S_P) = (\overline{S}_1)Z_1 + (\overline{S}_2)Z_2 + \ldots + (\overline{S}_m)Z_m + \ldots + (\overline{S}_n)Z_n + (S_P^o). \qquad (8.18)$$

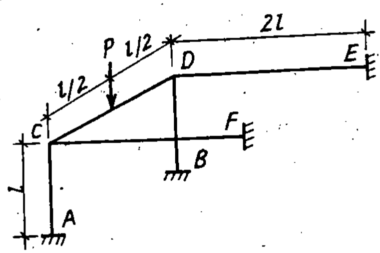
Các đại lượng trong (8.18) vẫn có ý nghĩa như đã trình bày trong chương 6.

Bảng 8.2

		
$M_{Az} = M_{Bz} = -\dfrac{GI_z}{l}$.	$M_{Az} = -\dfrac{b}{l}M^*$; $M_{Bz} = \dfrac{a}{l}M^*$.	$M_{Az} = -\dfrac{m\,c}{2\,l}(2b+c)$; $M_{Bz} = \dfrac{m\,c}{2\,l}(2a+c)$.

Ví dụ 8.6. Vẽ biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn cho khung trên hình 8.25. Cho biết khung có tiết diện không đổi, hình tròn có bán kính r; $G = 0{,}4E$.

Ta nhận thấy tải trọng P chỉ tác dụng trong mặt phẳng $ABCD$ của hệ cho nên nếu chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thì phần khung $ABCD$ chỉ biến dạng trong mặt phẳng $ABCD$. Mặt khác, căn cứ vào tính chất đối xứng của bài toán đã cho ta thấy các nút C và D không thể có chuyển vị thẳng mà chỉ có chuyển vị xoay bằng nhau và ngược chiều trong mặt phẳng $ABCD$.



Hình 8.25

Như vậy, khi tính hệ theo phương pháp chuyển vị ta chỉ cần một ẩn số, đó là cặp chuyển vị xoay đối xứng tại hai nút C và D xảy ra trong mặt phẳng $ABCD$.

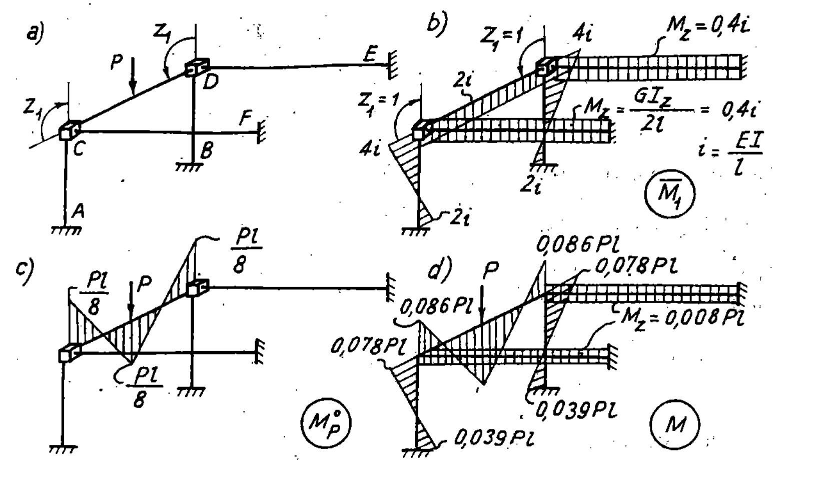
Hệ cơ bản tương ứng như trên hình 8.26a.

Để vẽ biểu đồ mômen uốn do chuyển vị $Z_1=1$ và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản ta sử dụng các số liệu cho trong các bảng 6.1, 6.2 và 8.2. Trong trường hợp này ta có:

$$EI_x = EI_y = E\frac{\pi r^4}{4} = EI\,; \quad GI_z = G\frac{\pi r^4}{2} = 0{,}8\,EI.$$

Kết quả như trên các hình 8.26b và c. Chú ý là để thể hiện biểu đồ mômen xoắn,

ngoài hình thức biểu thị bằng các đường kẻ song song với trục thanh như đã thực hiện trong ví dụ 8.5 ta còn có thể dùng hình thức khác như đã thực hiện đối với các thanh CF, DE trên hình 8.26b.



Hình 8.26

Từ các biểu đồ vừa tìm được, ta xác định các hệ số và số hạng tự do của phương trình chính tắc. Kết quả:

$$r_{11} = 2(4i+2i+0{,}4i) = 12{,}8i,$$

trong đó $i = EI/l$, đối với tiết diện tròn ta có $GI_z/2l = 0{,}4i$.

$$R_{1P} = -2\frac{Pl}{8} = -\frac{Pl}{4}.$$

Phương trình chính tắc: $\quad 12{,}8i\,Z_1 - \dfrac{Pl}{4} = 0.$

Suy ra: $\quad Z_1 = 0{,}0195\dfrac{Pl}{i} = 0{,}0195\dfrac{Pl^2}{EI}.$

Biểu đồ mômen tổng cộng được xác định theo công thức sau:

$$(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (M_P^o).$$

Kết quả tìm được như trên hình 8.26d.

CÂU HỎI ÔN TẬP

8.1. Nêu tính chất của các loại liên kết không gian.

8.2. Trình bày cách nối hai vật thể thành hệ không gian bất biến hình.

8.3. Nêu tính chất của bộ ba và trình bày cách áp dụng bộ ba để khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ dàn không gian.

8.4. Trình bày điều kiện cần và đủ để cấu tạo hệ không gian bất kỳ thành hệ bất biến hình.

8.5. Nêu nguyên tắc tính hệ không gian tĩnh định.

8.6. Nêu nguyên tắc tính dàn không gian tĩnh định.

8.7. Nêu sự khác nhau giữa cách tính chuyển vị trong hệ phẳng và hệ không gian. Giải thích ý nghĩa của các đại lượng trong công thức chuyển vị của hệ không gian.

8.8. Trình bày cách tính hệ không gian siêu tĩnh theo phương pháp lực. So với hệ phẳng, cách tính hệ siêu tĩnh không gian phức tạp hơn ở những điểm nào?

8.9. Trình bày cách tính hệ không gian siêu động theo phương pháp chuyển vị.

9 Phương pháp phân phối mômen

Phương pháp phân phối mômen thuộc loại phương pháp tính đúng dần, cho kết quả càng sát với kết quả tính chính xác (theo phương pháp lực hay phương pháp chuyển vị) nếu quá trình thực hiện tính toán càng kéo dài.

Hiện có nhiều phương pháp tính đúng dần áp dụng cho các kết cấu siêu tĩnh hoặc siêu động dưới nhiều hình thức khác nhau. Nói chung nội dung của các phương pháp này được trình bày dưới dạng phân phối mômen hoặc phân phối biến dạng theo hình thức này hoặc hình thức khác.

Trong chương này chúng ta chỉ nghiên cứu hai phương pháp phân phối mômen: *phương pháp H. Cross và phương pháp G. Kani* là những phương pháp được áp dụng nhiều trong thực tế đồng thời cũng là những phương pháp cơ bản dùng để làm cơ sở cho việc nghiên cứu các phương pháp tính đúng dần khác.

9.1. Phương pháp H. Cross

Phương pháp H.Cross được xây dựng trên cơ sở những giả thiết giống như những giả thiết của phương pháp chuyển vị.

Về thực chất, phương pháp này là một hình thức khác của phương pháp chuyển vị, trong đó việc giải hệ phương trình chính tắc được thực hiện theo phương pháp đúng dần có mang ý nghĩa vật lý.

Phương pháp H.Cross có những ưu điểm sau:

- *Tính toán đơn giản.* Hầu hết các phép tính trong phương pháp Cross chỉ là những phép tính cộng và nhân do đó chỉ cần dùng máy tính phổ thông cũng đủ để thực hiện.

- Phương pháp Cross *chỉ yêu cầu phải giải một số lượng phương trình rất ít* so với số lượng phương trình theo các phương pháp "chính xác", có trường hợp không cần phải giải hệ phương trình. Do đó phương pháp này thích hợp cho những hệ siêu tĩnh bậc cao chẳng hạn như hệ khung nhiều tầng, nhiều nhịp.

Tuy nhiên, phương pháp này cũng còn có những điểm hạn chế tương tự như phương pháp chuyển vị, thường chỉ áp dụng có hiệu quả cho những hệ khung hoặc dầm. Hiện nay cũng đã có một số phương pháp "cải tiến phương pháp Cross" nhằm mở rộng diện áp dụng và nâng cao hiệu quả. Trong giáo trình chỉ giới thiệu phương pháp Cross "thuần túy".

A. Khái niệm và quy ước về dấu

1. Khái niệm về hệ có nút chuyển vị thẳng và không chuyển vị thẳng

Dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài như tải trọng chẳng hạn, nói chung các nút của hệ có thể có chuyển vị xoay (nút bị xoay nhưng không thay đổi vị trí) và chuyển vị thẳng (thay đổi vị trí).

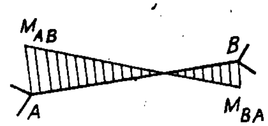
Trong quá trình biến dạng, nếu một hoặc một số nút của khung có chuyển vị thẳng thì khung được gọi là hệ có nút chuyển vị thẳng, còn nếu tất cả các nút không chuyển vị thẳng thì khung được gọi là hệ có nút không chuyển vị thẳng.

Để phân biệt hai loại hệ này ta có thể vận dụng biện pháp quen biết trong mục 6.1 chương 6 khi tìm số ẩn số của hệ theo phương pháp chuyển vị vì thực chất của hai vấn đề là một. Những hệ tồn tại số ẩn số chuyển vị thẳng n_2 là hệ có nút chuyển vị thẳng. Ngược lại, hệ có $n_2 = 0$ là hệ có nút không chuyển vị thẳng.

2. Ký hiệu và quy ước về dấu của mômen uốn và lực cắt

Đại lượng cần tìm trong phương pháp Cross là mômen uốn tại tiết diện ở các đầu thanh. Những mômen này được ký hiệu bằng chữ M có mang theo hai chỉ số. Chỉ số thứ nhất biểu thị vị trí của tiết diện chịu mômen uốn, chỉ số thứ hai kết hợp với chỉ số thứ nhất biểu thị thanh chịu mômen uốn đó. Đối với lực cắt ta cũng ký hiệu tương tự.

Ví dụ M_{AB} đọc là mômen uốn tại tiết diện A thuộc thanh AB (hình 9.1); Q_{AB} đọc là lực cắt tại tiết diện A thuộc thanh AB.

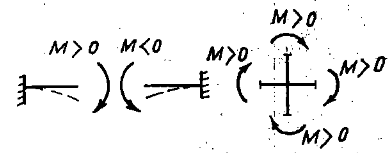


Hình 9.1

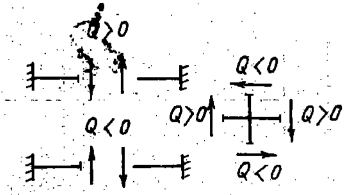
Quy ước về dấu của nội lực trong phương pháp Cross cũng khác với cách quy ước về dấu trong Sức bền vật liệu.

❊ *Mômen uốn tại nút được xem là dương khi nó làm cho thớ giữa của thanh quay theo chiều kim đồng hồ và được xem là âm khi nó làm cho thớ giữa của thanh quay ngược chiều kim đồng hồ* (hình 9.2).

❊ *Lực cắt được xem là dương khi nó làm cho phần thanh chịu lực quay theo chiều kim đồng hồ và được xem là âm khi nó làm quay ngược chiều kim đồng hồ* (giống SBVL), (hình 9.3).



Hình 9.2

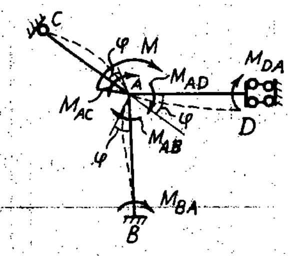


Hình 9.3

B. Sự phân phối mômen xung quanh một nút

Để chuẩn bị nghiên cứu phương pháp phân phối mômen ta khảo sát bài toán cơ bản: *sự phân phối mômen xung quanh một nút không có chuyển vị thẳng.*

Xét hệ chỉ có một nút A không có chuyển vị thẳng như trên hình 9.4. Giả sử đặt tại nút A một mômen ngoại lực M, yêu cầu xác định các mômen uốn M_{AB}, M_{AC}, M_{AD} do mômen M phân phối vào các tiết diện ở đầu A trong mỗi thanh và xác định mômen uốn M_{BA}, M_{CA} và M_{DA} tại các đầu đối diện với nút A.



Hình 9.4

Tất nhiên, các mômen uốn M_{AB}, M_{AC}, M_{AD} phải cân bằng với mômen M, ta có:

$$M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} + M = 0. \tag{9.1}$$

Dưới tác dụng của mômen M các đầu thanh tại nút A bị xoay. Căn cứ vào các số liệu tìm được trong bảng 6.2 chương 6, theo quy ước về dấu của Cross ta có:

✦ *Với thanh AB có đầu đối diện B là ngàm:*

$$\varphi_{AB} = -\frac{M_{AB}}{4\dfrac{EI_{AB}}{l_{AB}}} = -\frac{M_{AB}}{4R_{AB}}, \tag{9.2}$$

trong đó R_{AB} – độ cứng đơn vị quy ước của thanh có đầu đối diện là ngàm,

$$R_{AB} = \frac{EI_{AB}}{l_{AB}}. \tag{9.3}$$

✦ *Với thanh AC có đầu đối diện là khớp:*

$$\varphi_{AC} = -\frac{M_{AC}}{3\dfrac{EI_{AC}}{l_{AC}}} = -\frac{M_{AC}}{4\dfrac{3}{4}\dfrac{EI_{AC}}{l_{AC}}} = -\frac{M_{AC}}{4R_{AC}}, \tag{9,4}$$

trong đó R_{AC} – độ cứng đơn vị quy ước của thanh có đầu đối diện là khớp,