Chương 9: MỘT SỐ VẤN ĐỀ ĐẶC BIỆT TRONG LÝ THUYẾT UỐN VÀ XOẮN THANH

Mục tiêu chương:

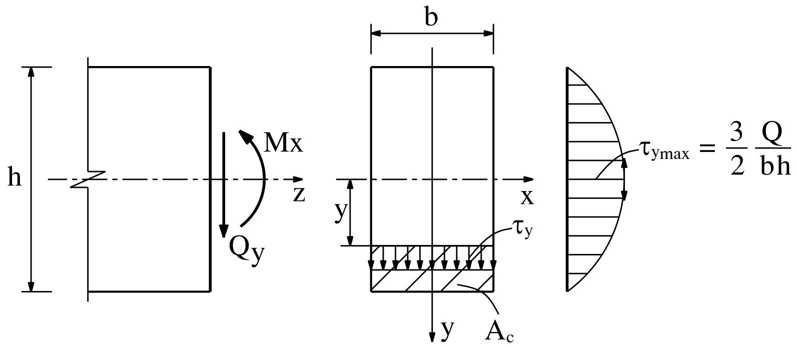
- Mở rộng công thức Juravski tính ứng suất tiếp trên tiết diện đặc, thành mỏng kín và thành mỏng hở. Qua đó xác định được tâm uốn của các tiết diện thành mỏng, xác định được ứng suất tiếp trên tiết diện bất kỳ chịu xoắn thuần tuý.

- Tính toán được ứng suất, chuyển vị của dầm chịu uốn gồm nhiều lớp vật liệu, dầm trên nền đàn hồi.

9.1. MỞ RỘNG CÔNG THỨC NAVIER-JURAVSKI TÍNH ỨNG SUẤT TIẾP CHỊU UỐN NGANG PHẲNG

9.1.1. Công thức Navier-Juravski đối với tiết diện chữ nhật hẹp:

Khi thanh chịu uốn ngang phẳng, nội lực thanh gồm lực cắt Q_y và mômen uốn M_x. Đối với thanh có tiết diện chữ nhật hẹp (b.h), lực cắt Q_y được giả thiết chỉ gây ra ứng suất tiếp τ_y phân bố đều theo bề rộng b của tiết diện (Hình 9.1).



Hình 9.1: Biểu đồ ứng suất trên tiết diện chữ nhật hẹp.

Theo Juravski, ứng suất tiếp τ_y được xác định theo công thức:

$$\tau_y = \frac{Q_y.S_x^c}{I_x.b^c} = \frac{6Q_y}{b.h^3}.\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \qquad (9.1)$$

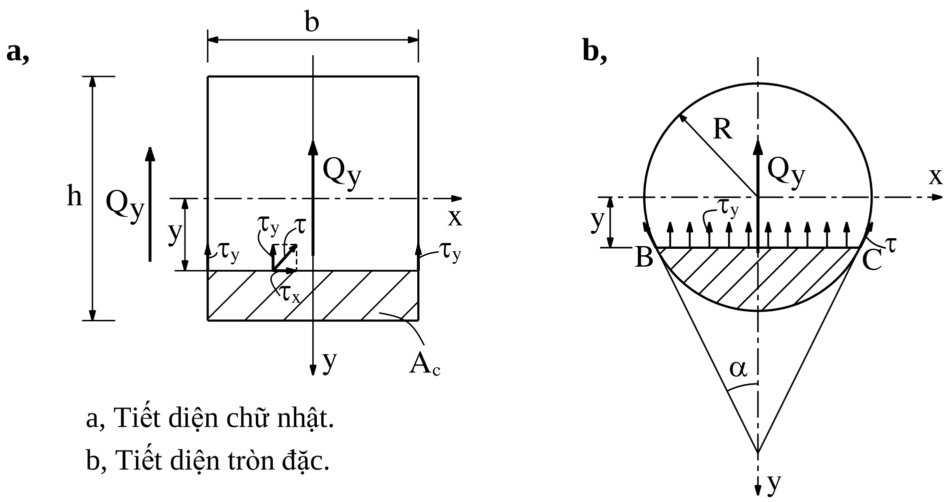
Ứng suất tiếp lớn nhất τ_{max} đạt trị số: $$\tau_{max} = \tau_0 = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{b.h} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{A} \qquad (9.2)$$

9.1.2. Mở rộng công thức Juravski cho tiết diện đặc không hẹp:

Khi tiết diện có bề rộng không hẹp (hình tròn, hình vuông, …), ứng suất tiếp trên tiết diện sẽ có hai thành phần τ_x và τ_y.

Nếu chấp nhận giả thiết thành phần ứng suất tiếp τ_y phân bố đều trên bề rộng tiết diện, sau khi tính τ_y theo Juravski có thể xác định được ứng suất tiếp τ_x và ứng suất tiếp toàn phần τ:

9.1.2.1. Đối với tiết diện chữ nhật không hẹp (Hình 9.2a):



a, Tiết diện chữ nhật.
b, Tiết diện tròn đặc.

Hình 1.2: Ứng suất tiếp trên tiết diện không hẹp.

Sự phân bố ứng suất trên tiết diện chữ nhật không hẹp như sau:

- Tại các điểm cạnh biên theo Q_y: Chỉ có τ_y hương theo Q_y.
- Tại các điểm bên trong : tồn tại cả τ_y, τ_x.

Vì ứng suất tiếp τ_y phân bố đều trên bề rộng tiết diện nên τ_y xác định theo (9.1):

$$\tau_y = \frac{Q_y.S_x^c}{I_x.b^c} = \frac{6Q_y}{b.h^3}.\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

9.1.2.2. Đối với tiết diện tròn đặc (Hình 9.2b):

Vì ứng suất tiếp τ_y phân bố đều trên bề rộng tiết diện nên có:

- Lực cắt Q_y: $\sum_A \tau_y = Q_y$ - Ứng suất tiếp toàn phần τ: $\tau = \dfrac{\tau_y}{\cos\alpha}$

Khi $\alpha = 0$, ứng suất tiếp toàn phần τ chính là ứng suất tiếp theo phương y τ_y: $\tau = \tau_y$.

Khảo sát ứng suất tiếp τ_y trên cạnh BC với ứng suất tiếp τ_y: $\tau_y = \dfrac{Q_y.S_x^C}{I_x.b^c}$

- Bề rộng b^c tại điểm khảo sát: $b^c = BC = 2\sqrt{R^2 - y^2}$
- Mômen quán tính của toàn tiết diện: $I_x = \dfrac{\pi R^4}{4}$
- Mômen tĩnh của phần diện tích cắt: $S_x^C = \dfrac{2}{3}\sqrt{\left(R^2 - y^2\right)^3}$
- Ứng suất tiếp τ_y theo phương lực cắt Q_y: $\tau_y = \dfrac{4Q_y}{3\pi R^4}\left(R^2 - y^2\right)$ (9.3)
- Ứng suất tiếp lớn nhất τ_{max} đạt trị số: $\tau_{max} = \tau_0 = \dfrac{4Q}{3A}$ (9.4)

- Ứng suất tiếp toàn phần τ tại hai mép tiết diện sẽ tiếp tuyến với chu vi tiết diện và có giá trị:

$$\tau = \frac{\tau_y}{\cos\alpha} = \frac{4Q_y}{3\pi R^3}\sqrt{R^2 - y^2} \qquad (9.5)$$

9.1.3. Ứng suất tiếp trên tiết diện có dạng dải chữ nhật hẹp:

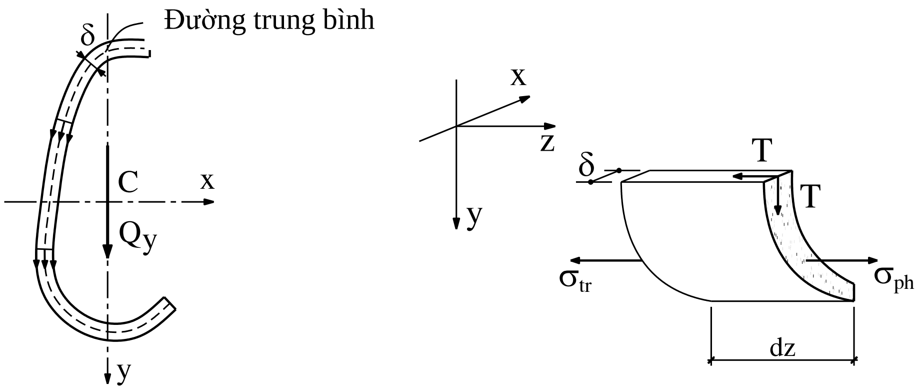
Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có tiết diện dạng dải chữ nhật hẹp với bề dày δ và có đường trung bình (ĐTB) là đường cách đều hai cạnh bên của tiết diện (Hình 9.3a).

Khi δ nhỏ so với chiều dài ĐTB có thể xem τ phân bố đều trên δ và có phương trùng với tiếp tuyến của ĐTB. Lúc này, xét cân bằng một phân tố cong có chiều dài dz (Hình 9.3b):

- Vì τ được xem là phân bố đều trên δ nên hợp lực T của chúng được xác định: T = δ.τ

- Ứng suất pháp tại tiết diện bên phải của phân tố: $\sigma_{ph} = \frac{(M_x + dM_x)}{I_x}.y$

(Trong đó, y là khoảng cách từ điểm tính ứng suất pháp tới trục trung hòa x.)



a, Tiết diện dải chữ nhật hẹp. b, Cân bằng của phân tố thanh.

Hình 9.3: Ứng suất tiếp trên tiết diện dải chữ nhật hẹp.

- Ứng suất pháp tại tiết diện bên trái của phân tố: $\sigma_{tr} = \frac{M_x}{I_x}.y$

- Từ phương trình cân bằng của tổng các lực theo phương z:

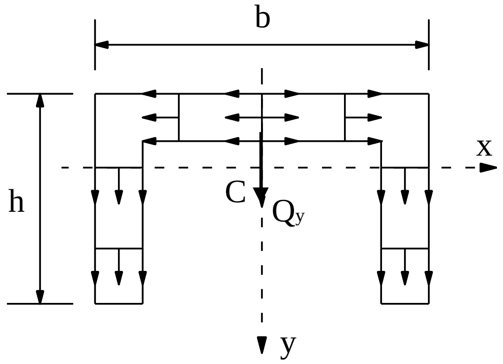
$$\int_{A_C}\sigma_{ph}.dA - \int_{A_C}\sigma_{tr}.dA - T.dz = 0 \quad \text{hay} \quad \int_{A_C}\sigma_{ph}.dA - \int_{A_C}\sigma_{tr}.dA - \tau.\delta dz = 0$$

Suy ra ứng suất tiếp τ có giá trị:

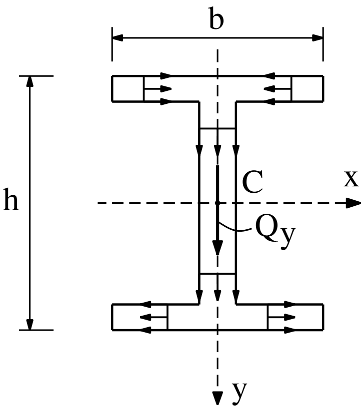
$$\tau = \frac{dM_x}{dz}.\frac{\int_{A_C} ydA}{I_x} = \frac{Q_y.S_x^C}{I_x.\delta} \qquad (9.6)$$

Nhận xét về sự phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện có dạng dải chữ nhật hẹp:

1, Ứng suất tiếp tạo thành luồng phân bố đều trên bề dày δ, có phương song song với tiếp tuyến của ĐTB và có chiều phù hợp với chiều của lực cắt Q (Hình 9.4):



a, Tiết diện chữ U.



b, Tiết diện chữ I.

Hình 9.4: Luồng ứng suất tiếp trên tiết diện.

- Ứng suất tiếp do lực cắt Q_y gây ra: $$\tau_{Q_y} = \frac{Q_y S_x^C}{I_x \delta} \qquad (9.6)$$

- Ứng suất tiếp do lực cắt Q_x gây ra: $$\tau_{Q_x} = \frac{Q_x . S_y^C}{I_y . \delta} \qquad (9.7)$$

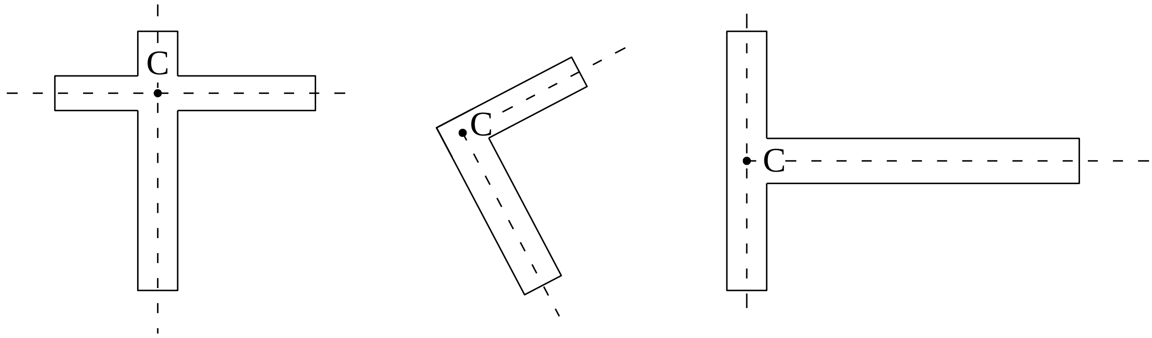
2, Trong trường hợp uốn không gian có cả lực cắt Q_x và Q_y thì ứng suất tiếp toàn phần sẽ bằng tổng đại số của các ứng suất tiếp do Q_x và Q_y gây ra riêng lẽ:

$$\left.\begin{matrix} Q_x \rightarrow \tau_{Q_x} \\ Q_y \rightarrow \tau_{Q_y} \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Ứng suất tiếp toàn phần: } \tau = \tau_{Q_x} + \tau_{Q_y} \text{ (cùng phương)}$$

3, Với thanh thành mỏng kín, ứng suất tiếp được tính như thanh mỏng hở nhưng diện tích cắt sẽ lấy là phần diện tích giới hạn bởi một bề rộng đi qua điểm đang xét và một bề rộng đi qua điểm nào đó đã biết giá trị ứng suất tiếp.

9.2. TÂM UỐN

9.2.1. Khái niệm về tâm uốn:



Hình 9.5: Tâm uốn của tiết diện gồm các dải chữ nhật đồng quy.

Tâm uốn là một điểm trong mặt phẳng qua mặt cắt ngang mà tổng mômen của luồng ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang đó đối với điểm này bằng không.

Dựa vào điều kiện cân bằng của mômen trong mặt phẳng tiết diện để xác định vị trí của tâm uốn:

- Nếu tiết diện có trục đối xứng và chịu uốn trong mặt phẳng chứa trục đối xứng thì tâm uốn chính là tâm của tiết diện (Hình 9.4).
- Nếu tiết diện gồm các giải chữ nhật đồng quy tại một điểm thì tâm uốn chính là điểm đồng quy vì tại đây ứng suất tiếp không gây ra mômen (Hình 9.5).

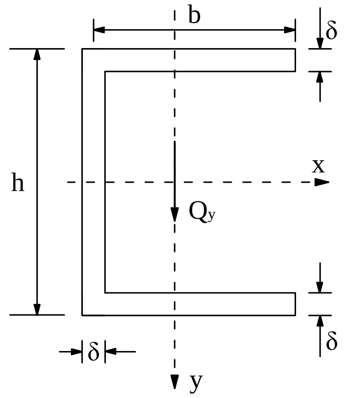
9.2.2. Cách xác định tâm uốn:

Để xác định tâm uốn cần tiến hành các bước sau:

- Xác định các hợp lực ứng suất tiếp trên mặt cắt tiêt diện (trên hình vẽ).
- Xác định giá trị của các hợp lực ứng suất tiếp trên mặt cắt tiêt diện.
- Xác định vị trí tâm uốn của mặt cắt tiết diện dựa vào điều kiện: mômen do các hợp lực ứng suất tiếp gây ra tại tâm uốn bằng không.

**** Ví dụ:***

Xác định tâm uốn của tiết diện cho trên hình vẽ chịu lực cắt Q_y.



♦ Lời giải:

1, Luồng ứng suất tiếp có chiều như hinh 9.6:

2, Xác định giá trị của các hợp lực ứng suất tiếp:

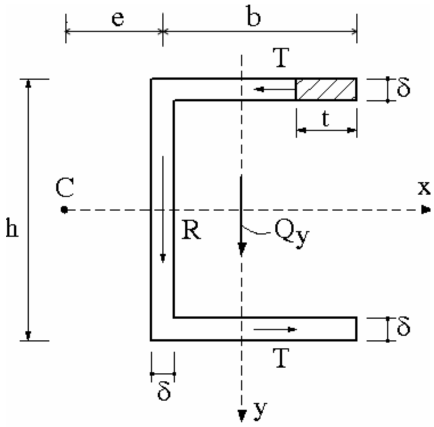
- Hợp lực ứng suất tiếp ở phần cánh T:

+ Ứng suất tiếp τ (với $0 \le t \le b$):

$$\tau = \frac{Q_y.S_x^C}{I_x.\delta} = \frac{Q_y}{I_x.\delta}\delta.t.\left(\frac{h}{2}-\frac{\delta}{2}\right) = \frac{Q_y}{I_x}.t.\left(\frac{h}{2}-\frac{\delta}{2}\right)$$

+ Hợp lực ứng suất tiếp ở phần cánh T:

$$T = \int_0^b \tau.\delta.dt = \frac{Q_y.\delta}{2I_x}.(h-\delta)\int_0^b \tau.dt = \frac{Q_y.\delta^2.(h-\delta).b^2}{4I_x}$$



Hình 9.6: Ví dụ xác định tâm uốn.

- Hợp lực ứng suất tiếp ở phần bụng R: $R = Q_y$

3, Xác định vị trí tâm uốn: Gọi C là tâm uốn cách hợp lực R một khoảng cách e.

- Mômen do các hợp lực ứng suất tiếp gây ra tại điểm C bằng 0:

$$\sum M_C = 0 \rightarrow \quad R.e - 2T.\frac{h-\delta}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad e = \frac{T.(h-\delta)}{R} \qquad (*)$$

- Thay các giá trị của T và R vào (*) có vị trí của tâm uốn C: $e = \dfrac{\delta.b^2.(h-\delta)^2}{4I_x}$

9.3. UỐN DẦM GỒM NHIỀU LỚP VẬT LIỆU

9.3.1. Các giả thiết:

Để đơn giản tính toán cho bài toán uốn dầm gồm nhiều lớp vật liệu cần đưa ra các giả thiết sau:

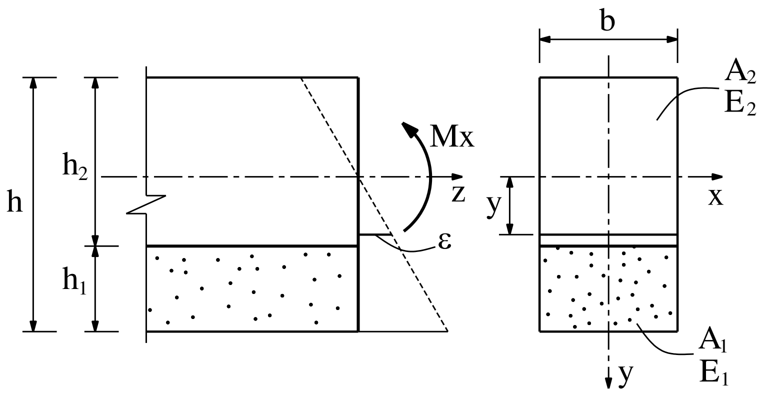
Giả thiết các lớp vật liệu tạo nên dầm là gắn chặt với nhau.

Các liên kết giữa các lớp vật liệu là tuyệt đối cứng, bề mặt tiếp xúc của các lớp vật liệu liền nhau sẽ cùng làm việc và cùng biến dạng như nhau.

Mặt cắt ngang khi uốn vẫn phẳng nên biến dạng dài ε do ứng suất pháp gây ra phân bố bậc nhất theo trục y.

9.3.2. Bài toán uốn dầm gồm nhiều lớp vật liệu:

Nhằm đảm bảo tính đơn giản mà vẫn mang tính tổng quát, xét dầm gồm hai lớp vật liệu lần lượt có các đặc trưng về diện tích A_1, A_2 và môđun đàn hồi E_1, E_2 (Hình 9.7):



Hình 9.7: Uốn dầm gồm hai lơp vật liệu.

9.3.2.1. Xác định vị trí đường trung hòa:

- Độ cong của lớp trung hòa: $\varepsilon_z = \varepsilon = \dfrac{y}{\rho}$ với ρ là bán kính cong.

- Ứng suất trong mỗi lớp vật liệu xác định theo định luật Hooke:

+ Lớp 1: $$\sigma_1 = E_1.\varepsilon = E_1.\frac{y}{\rho} \tag{9.8}$$

+ Lớp 2: $$\sigma_2 = E_2.\varepsilon = E_2.\frac{y}{\rho} \tag{9.9}$$

- Tại ví trí trụng trung hòa, lực dọc N bằng không nên có:

$$N = \int_A \sigma.dA = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{A_1} \sigma_1.dA + \int_{A_2} \sigma_2.dA = 0$$

Hay $$E_1 \int_{A_1} y.dA + E_2 \int_{A_2} y.dA = 0 \tag{9.10}$$

(Phương trình (9.10) dùng để xác định vị trí của trục trung hòa trên mặt cắt ngang.)

9.3.2.2. Xác định ứng suất pháp σ_z:

- Mômen uốn M_x phát sinh trong dầm: $M_x = \int_A \sigma_z.y.dA = \int_{A_1} \sigma_1.y.dA + \int_{A_2} \sigma_2.y.dA$

- Dựa vào điều kiện về mômen uốn để xác định độ cong $1/\rho$ của thanh:

$$M_x = \int_{A_1} \sigma_1.y.dA + \int_{A_2} \sigma_2.y.dA = \frac{E_1}{\rho}\int_{A_1} y^2.dA + \frac{E_2}{\rho}\int_{A_2} y^2.dA = \frac{1}{\rho}\left(E_1.I_{1,x} + E_2.I_{2,x}\right)$$

Vậy, độ cong $1/\rho$ của thanh được xác định: $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M_x}{E_1.I_{1,x} + E_2.I_{2,x}}$ (9.11)

- Ứng suất pháp trên từng lớp vật liệu:

$$\begin{cases} \sigma_1 = E_1.\dfrac{M_x}{E_1.I_{1,x} + E_2.I_{2,x}}.y \\ \sigma_2 = E_2.\dfrac{M_x}{E_1.I_{1,x} + E_2.I_{2,x}}.y \end{cases} \qquad (9.12)$$

9.3.2.3. Nhận xét:

Từ bài toán uốn dầm gồm hai lớp vật liệu, có thể đưa ra một số nhận xét sau:

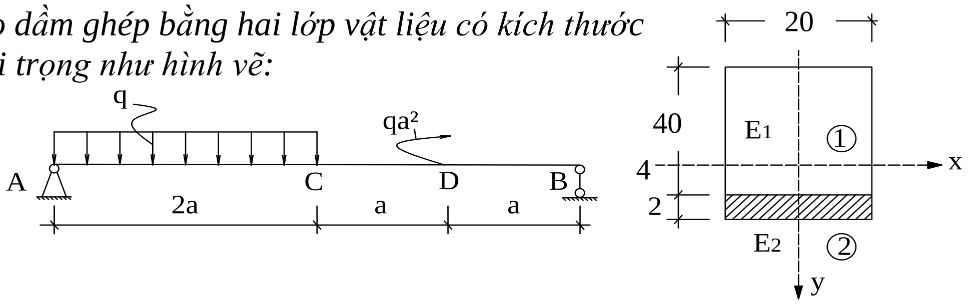
Trường hợp dầm gồm nhiều lớp vật liệu, cách tính hoàn toàn tương tự như trường hợp dầm gồm hai lớp vật liệu.

Chỉ áp dụng khi tính ứng suất pháp và không dùng được khi tính ứng suất tiếp.

Ngoài cách trên, có thể giải quyết bài toán này bằng cách đưa về mặt cắt tương đương.

9.3.3. Ví dụ:

Cho dầm ghép bằng hai lớp vật liệu có kích thước và chịu tải trọng như hình vẽ:



Với q = 30kN/m, a = 2m. Xác định ứng suất lớn nhất và nhỏ nhất phát sinh trong mỗi lớp vật liệu. Biết: $E_1 = 19.10^4$ kN/cm^2 và $E_2 = 2.10^4$kN/cm^2.

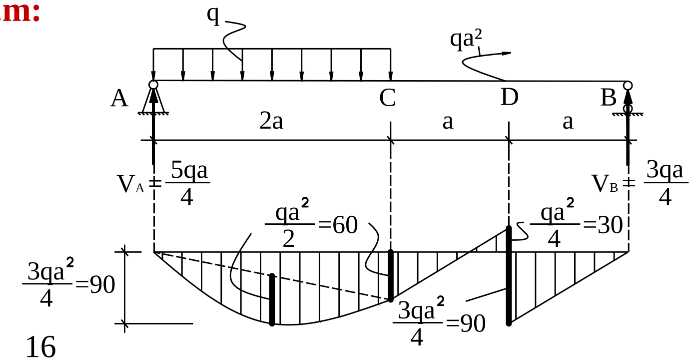
♦ Lời giải:

1, Xác định vị trí nguy hiểm nhất của dầm:

- Xác định phản lực liên kết V_A và V_B:

+ Phản lực tại A: $V_A = \dfrac{5qa}{4}$

+ Phản lực tại B: $V_B = \dfrac{3qa}{4}$

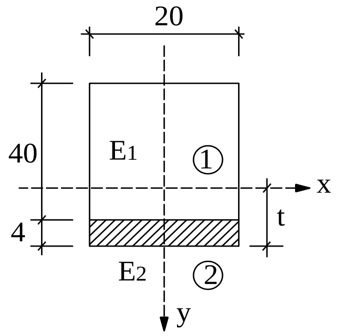


Hình 9.8a: Biểu đồ mômen uốn M_x.

- Vẽ biểu đồ mômen M_x (Hình 9.8a).

- Giá trị $|M_x|_{max}$: $|M_x|_{max} = M_C = \dfrac{3qa^2}{4} = 90$ kNm

2, Xác định vị trí của trục trung hòa:



Hình 9.8b:
Xác định trục trung hòa.

- Giả thiết trục trung hòa nằm trong lớp vật liệu 1. Sẽ có:

$$E_1.\ S_x^1 + E_2.\ S_x^2 = 0 \qquad (*)$$

- Gọi t là khoảng cách từ trục trung hòa đến mép dưới của lớp vật liệu 2. Điều kiện xác định của t:

$$\frac{h_2}{2} = 2cm < t < \left(\frac{h_1}{2} + h_2\right) = 24cm$$

- Mômen tĩnh của các lớp vật liệu:

+ Lớp 1: $S_x^1 = y_C^1.A_1 = 800.(t - 24)$ + Lớp 2: $S_x^2 = y_C^2.A_2 = 80.(t - 2)$

- Xác định vị trí của trục trung hòa:

+ Thay vào (*) có: $19.10^4.800.(t - 24) + 2.10^4.80.(t - 2) = 0$ (2*)

+ Giải (2*) được: $192t - 4564 = 0 \rightarrow t = 23{,}80cm$

+ So sánh với điều kiện, chọn: $t = 23{,}80cm$.

3, Xác định ứng suất lớn nhất và nhỏ nhất phát sinh trong mỗi lớp vật liệu:

- Xác định các mômen quán tính của các lớp vật liệu:

+ Lớp 1: $I_x^1 = \dfrac{1}{12}.b.h_1^{\ 3} + (24 - t)^2.b.h_1 = 106698{,}7cm^4$

+ Lớp 2: $I_x^2 = \dfrac{1}{12}.b.h_2^{\ 3} + (t - 2)^2.b.h_2 = 38125{,}9cm^4$

- Ứng suất pháp cực trị của mỗi lớp vật liệu:

+ Lớp 1: → Tọa độ cực trị: $y_{max} = 19{,}8cm$ và $y_{min} = -20{,}2cm$

→ Ứng suất pháp lớn nhất: $\sigma^1_{max} = 3{,}267 \dfrac{kN}{cm^2}$ và $\sigma^1_{min} = -3{,}333 \dfrac{kN}{cm^2}$

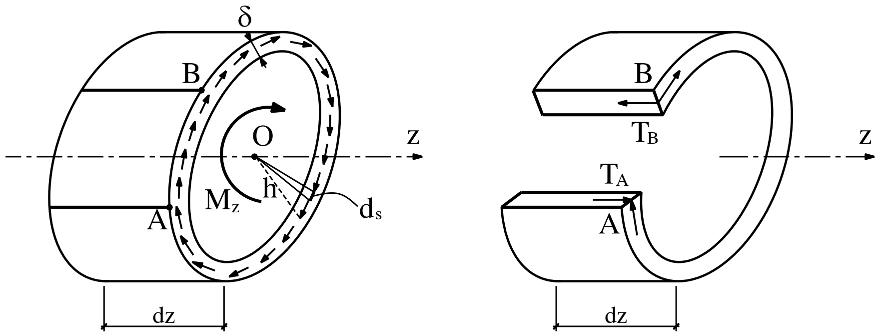
+ Lớp 2: → Tọa độ cực trị: $y_{max} = 23{,}8cm$ và $y_{min} = 19{,}8cm$

→ Ứng suất pháp lớn nhất: $\sigma^1_{max} = 0{,}413 \dfrac{kN}{cm^2}$ và $\sigma^1_{min} = 0{,}344 \dfrac{kN}{cm^2}$

9.4. XOẮN THANH CÓ MẶT CẮT MỎNG KÍN

9.4.1. Biểu thức ứng suất:

Xét thanh có mặt cắt mỏng kín, bề dày δ, chịu M_z (Hình 9.9). Để xác định được ứng suất trong trường hợp này cần dựa vào một số giả thiết sau:



Hình 9.9: Xoắn thanh có mặt cắt mỏng kín.

- Thanh chỉ chịu … ỉ xuất hiện ứng suất tiếp τ và tổng mômen của chúng đối với trục thanh sẽ bằng M_z.
- Vì δ rất bé nên có thể xem τ phân bố đều trên δ.
- Phương của ứng suất tiếp cùng phương tiếp tuyến với đường trung bình.

Xác định biểu thức tính ứng suất:

- Tách phân tố thanh giới hạn bởi A và B. Trên mặt tiết diện chỉ có ứng suất tiếp:

+ Tại A, bề dày tiết diện δ_A sẽ có ứng lực: $T_A = \tau_A.\delta_A$

+ Tại B, bề dày tiết diện δ_B sẽ có ứng lực: $T_B = \tau_B.\delta_B$

- Điều kiện cân bằng của phân tố thanh: $\Sigma Z = 0 \;\rightarrow\; T_A = T_B = T = \text{const}$ (9.13)

Từ (9.13) chứng tỏ: **Hợp lực của ứng suất trên bề dày tại mọi điểm là như nhau dù bề dày tai mọi điểm có thể khác nhau**.

Xét một phân tố có:
♦ Diện tích dA: $\delta.ds$
♦ Tổng hợp lực trên phân tố: $\tau.\delta.ds$
♦ Tổng mômen của phân tố đối với O: $\tau.\delta.ds.h$

- Tổng mômen đối với O của hợp lực trên toàn tiết diện: $M_z = \int_A \tau.\delta.h.ds = T\int_A h.ds$

$$\Rightarrow \quad M_z = T.2\Omega \qquad \Rightarrow \quad T = \frac{M_z}{2\Omega} \qquad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M_z}{2\Omega.\delta} \qquad (9.14)$$

Trong đó: Ω là diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi đường trung bình của toàn tiết diện.

Từ (9.14) chứng tỏ: **Ứng suất tiếp khi xoắn không phù thuộc vào vật liệu**. Do đó, có thể áp dụng công thức (9.14) để tính ứng suất tiếp cho thanh chịu xoắn làm từ các loại vật liệu khác nhau.

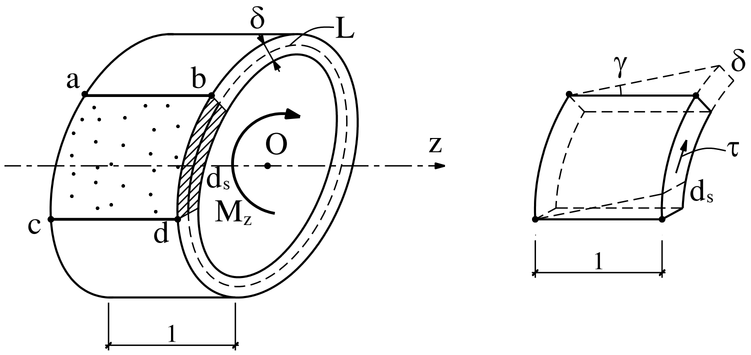
9.4.2. Biểu thức tính góc xoắn:

Để tính góc xoắn của thanh thành mỏng sử dụng nguyên lý cân bằng năng lượng.

Xét đoạn thanh có chiều dài bằng đơn vị, chịu mômen xoắn M_z, có góc xoắn tương đối θ (Hình 9.10):

Công ngoại lực: $$A = \frac{M_z\theta}{2}$$

Công trong một đơn vị thể tích của ứng suất tiếp: $$\frac{\tau.\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}$$



Hình 9.10: Xác định góc xoắn.

Công trên thể tích phân tố đang xét: $$\frac{\tau^2}{2G}.\delta.ds$$

Công trên toàn bộ đoạn thanh đang xét: $$\oint_L \frac{\tau^2}{2G}.\delta.ds$$

Theo nguyên lý cân bằng năng lượng, công của mômen trên chuyển vị góc và công của ứng suất trên các biến dạng tương đương là như nhau:

$$\frac{M_z\theta}{2} = \oint_L \frac{\tau^2}{2G}.\delta.ds = \oint_L \frac{\delta}{2G}.\frac{M_z^2}{4\Omega^2.\delta^2}.ds$$

Suy ra, góc xoắn θ trên một đơn vị chiều dài thanh: $$\theta = \frac{M_z}{I_{x_0}.G} \quad (9.15)$$

Xác định mômen quán tính xoắn của tiết diện I_{x0}: $$I_{x_0} = \frac{4\Omega^2}{\oint_L \frac{ds}{\delta}} \quad (9.16)$$

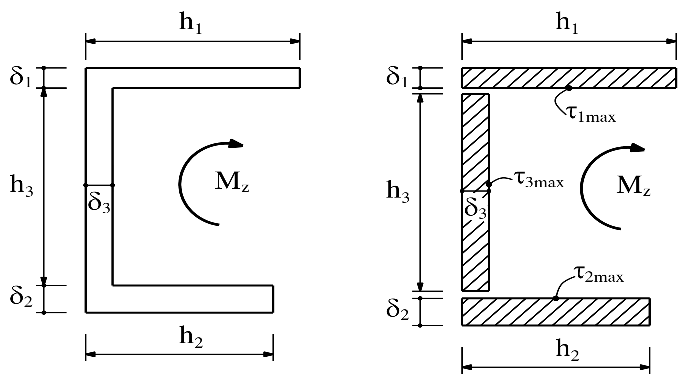
- Nếu δ = const trên tiết diện, gọi L là chiều dài đường trung bình: $$I_{x_0} = \frac{4\delta.\Omega^2}{L}$$

- Nếu δ = const trên từng đoạn chiều dài l_i của đường trung bình: $$I_{x_0} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{l_i}{\delta_i}}$$

9.5. XOẮN THANH CÓ MẶT CẮT MỎNG HỞ

Để đơn giản, tính toán cho trường hợp thanh có mặt cắt ngang mỏng hở được hình thành từ các hình chữ nhật mỏng.

Xét tiết diện mỏng hở chịu mômen xoắn M (Hình 9.11). Tiết diện được chia thành những phần tử chữ nhật mỏng có kích thước b_i và δ_i ($b_i > \delta_i$) cùng chiều xoắn:



Hình 9.11: Xoắn thanh có mặt cắt mỏng hở.

Mômen xoắn M trên tiết diệ được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \Sigma M_i \qquad (*)$$

Với tiết diện chữ nhật hẹp ($h/\delta_i \geq 10$), có:

- Góc xoắn θ: $\theta_i = \dfrac{M_i}{\frac{1}{3}G.h_i.\delta_i^3}$ - Ứng suất tiếp: $\tau_{i,max} = \dfrac{M_i}{\frac{1}{3}h_i.\delta_i^2}$

Các phần tử chữ nhật này là các bộ phận của một tiết diện duy nhất, nên:

- Góc xoắn: các góc xoắn thành phần θ_n cùng bằng góc xoắn θ của tiết diện:

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta$$

Hay
$$\theta = \frac{M_1}{\frac{1}{3}G.h_1.\delta_1^3} = \frac{M_2}{\frac{1}{3}G.h_2.\delta_2^3} = \ldots = \frac{M_n}{\frac{1}{3}G.h_n.\delta_n^3} = \frac{\sum M_i}{\frac{1}{3}G.\sum h_i.\delta_1^3} \qquad (2*)$$

Theo (*) và (2*) sẽ có:
$$\theta = \frac{M}{\frac{1}{3}G.\sum h_i.\delta_i^3} = \frac{M}{G.I_{x_0}} \qquad (9.17)$$

- Ứng suất tiếp:

+ Ứng suất tiếp trên từng dải tiết diện:

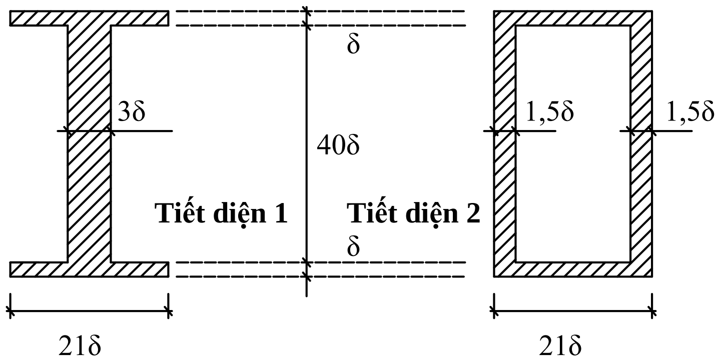
$$\tau_{i,max} = \frac{M_i}{\frac{1}{3}h_i.\delta_i^2} = \frac{1}{\frac{1}{3}h_i.\delta_i^2}\frac{M\frac{1}{3}h_i.\delta_i^3}{\frac{1}{3}\sum h_i.\delta_i^3} = \frac{M}{I_{x_0}}.\delta_i \qquad (9.18)$$

+ Ứng suất tiếp lớn nhất ở giữa chiều dài của dải có bề dày lớn nhất:

$$\tau_{max} = \frac{M}{I_{x_0}}.\delta_{max} \tag{9.19}$$

Ví dụ:

Cho tiết diện cùng chịu xoắn (hình vẽ cùng được thiết kế từ một vật liệu như nhau.
So sánh độ bền và độ cứng của hai tiết diện kể trên.



♦ **Lời giải:**

1, So sánh về độ bền của hai tiết diện:

- Đối với tiết diện 1:

+ Mômen quán tính $I^1_{x_0}$: $I^1_{x_0} = \frac{1}{3}\sum_1^3 h_i\delta_i^3 = \frac{1}{3}\left[2.21\delta.\delta^3 + 40\delta.(3\delta)^3\right] = 374\delta^4$

+ Ứng suất tiếp lớn nhất: $\tau^1_{max} = \frac{M_z}{I^1_{x_0}}.\delta^1_{max} = \frac{M_z}{374\delta^4}.3\delta = \frac{M_z}{124,667\delta^3}$

- Đối với tiết diện 2:

+ Diện tích giới hạn bởi đường trung bình: $\Omega = 19,5\delta.41\delta = 799,5\delta^2$

+ Mômen quán tính $I^2_{x_0}$: $I^2_{x_0} = \frac{4\Omega^2}{\sum\frac{l_i}{\delta_i}} = \frac{4.\left(799,5\delta^2\right)^2}{2.\left(\frac{19,5\delta}{\delta} + \frac{41\delta}{1,5\delta}\right)} = \frac{2556801\delta^4}{93,667} = 27297\delta^4$

+ Ứng suất tiếp lớn nhất: $\tau^2_{max} = \frac{M_z}{2\Omega\delta_{min}} = \frac{M_z}{2.799,5\delta^3} = \frac{M_z}{1599\delta^3}$

- So sánh về độ bền của hai tiết diện: $\frac{\tau^1_{max}}{\tau^2_{max}} = \frac{\frac{M_z}{124,667\delta^3}}{\frac{M_z}{1599\delta^3}} = \frac{1599}{124,667} > 1$

- Kết luận: Vậy **Tiết diện 2 bền hơn tiết diện 1**

2, So sánh về độ cứng của hai tiết diện:

- So sánh về độ bền của hai tiết diện: $$\frac{\theta^1_{max}}{\theta^2_{max}} = \frac{\dfrac{M_z}{GI^1_{xo}}}{\dfrac{M_z}{GI^2_{xo}}} = \frac{I^2_{xo}}{I^1_{xo}} = \frac{27297\delta^4}{374\delta^4} > 1$$

- Kết luận: Vậy **Tiết diện 2 cứng hơn tiết diện 1**

9.6. DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

9.6.1. Nền và mô hình nền:

Nền là môi trường hay vật thể đàn hồi có dầm đặt tiếp xúc liên tục trên bề mặt.

Giá trị nội lực trong dầm được xác định phù thuộc vào biến dạng của dầm cũng như phù thuộc vào quan niệm về **mô hình nền**.

Mô hình nền Winkler: Cường độ phản lực của nền tại một điểm tỷ lệ với độ lún của nền tại điểm đó. Mô hình này có những đặc điểm sau:

Công thức xác định phản lực nền: $p = k.y$ (9.20)

Trong đó: p: Phản lực nền trên một đơn vị diện tích.

y: Độ lún của nền (bằng độ võng của dầm).

k: hệ số nền, là đặc trưng cơ học cơ bản của nền. k được xác định từ các thí nghiệm và phụ thuộc vào loại nền.

Ưu và nhược điểm của mô hình:

- Ưu điểm: Quan niệm nền như một dãy các lò xo có độ cứng k, do đó, quá trình tính toán đơn giản và có kể đến tính lún của nền.
- Nhược điểm: Khi chịu tải trọng phân bố đều, nền được xem như lún đều. Nhưng thực tế không phải như vậy. Do đó, mô hình chỉ phản ánh gần đúng thực tế.

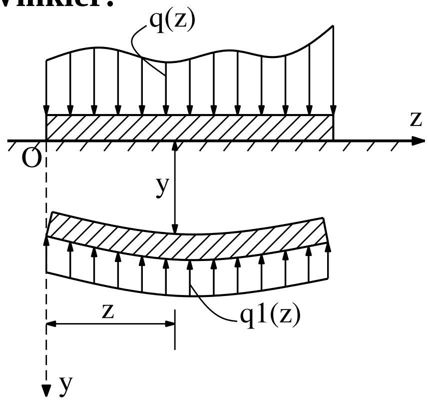
9.6.2. Phương trình vi phân độ võng của dầm trên nền Winkler:

Xét một dầm có độ cứng EI là hằng số, đặt trên nền đàn hồi, chịu tải trọng phân bố đường q (theo bề rộng b) hướng xuống (Hình 9.12):

- Với hệ trục như hình vẽ, giả sử tại hoành độ z, dầm có độ võng y.
- Phản lực nền phân bố đường: $q_1 = b.p = b.k.y = K.y$

Trong đó: $K = k.b$, có thứ nguyên : [lực]/[chiều dài]^2.

- Tổng tải trọng tác dụng lên dầm : $q_1 - q$.
- Phương trình vi phân độ võng của dầm chịu uốn:



Hình 9.12: Dầm trên nền đàn hồi chịu tải trọng phân bố

$$y'' = -\frac{M}{E.I} \quad \rightarrow \quad y^{iv} = -\frac{(-q+q_1)}{EI} \quad \rightarrow \quad E.I.y^{iv} = q - K.y$$

Có thể viết lại dưới dạng sau: $y^{iv} + 4\alpha^4.y = \dfrac{q}{E.I}$ (9.21) với $\alpha = \sqrt[4]{\dfrac{K}{4E.I}}$

- Nghiệm của phương trình (9.21) có dạng: $y = \overline{y} + y^*$

Trong đó: → $\overline{y}$: Nghiệm tổng quát của phương trình (1.21) với vế phải bằng 0.

$$\overline{y} = e^{\alpha z}(C_1\cos\alpha z + C_2\sin\alpha z) + e^{-\alpha z}(C_3\cos\alpha z + C_4\sin\alpha z) \qquad (9.22)$$

(Với: C_i là các hằng số được xác định từ điều kiện biên.)

→ y*: Nghiệm riêng của phương trình (1.21): $y^* = \dfrac{q(z)}{4\alpha^4.E.I} = \dfrac{q(z)}{K}$ (9.23)

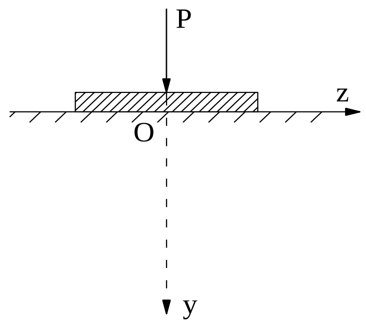
9.6.3. Dầm dài vô hạn chịu lực tập trung P:

Xét dầm có chiều dài được xem là vô hạn chịu lực tập trung P (Hình 9.13).

Vì dầm dài vô hạn nên lực P được coi là đặt tại giữa dầm. Lúc này, dầm là đối xứng nên chỉ cần xét nữa dầm có $z \geq 0$:

Khi không có lực phân bố, nghiệm riêng của phương trình $y^* = 0$, nghiệm của phương trình sẽ là:

$$y = e^{\alpha z}.(C_1.\cos\alpha z + C_2.\sin\alpha z) + e^{-\alpha z}.(C_3.\cos\alpha z + C_4.\sin\alpha z)$$



Hình 9.13: Dầm trên nền đàn hồi chịu tải trọng tập trung.

Xét các điều kiện biên:

- Khi $z \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$. Sẽ có:

+ Nghiệm: $y = e^{-\alpha z}(C_3\cos\alpha z + C_4\sin\alpha z)$

+ Độ võng:

$$\varphi = y' = -\alpha.e^{-\alpha z}.[(C_3 - C_4).\cos\alpha z + (C_3 + C_4).\sin\alpha z]$$

+ Mômen: $M = -E.I.y^{(2)} = -2\alpha^2.E.I.e^{-\alpha z}.(C_3.\sin\alpha z - C_4.\cos\alpha z)$

+ Lực cắt: $Q = -E.I.y^{(3)} = -2\alpha^3.E.I.e^{-\alpha z}.[(C_3+C_4).\cos\alpha z + (C_4 - C_3).\sin\alpha z]$

- Tại z = 0 có: $Q(0) = -P/2$ và $y'(0) = \varphi(0) = 0$

Từ các điều kiện biên, có được hệ phương trình: $\begin{cases} C_3 - C_4 = 0 \\ C_3 + C_4 = \dfrac{P}{4\alpha^3.E.I} \end{cases}$

Giải hệ tìm được nghiệm: $C_3 = C_4 = \dfrac{P}{8\alpha^3.E.I} = \dfrac{P.\alpha}{2K}$

Kết quả của bài toán:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\alpha.P}{2K}.\eta_0.(\alpha z) \\ \varphi = y' = -\dfrac{\alpha^2.P}{K}.\eta_3.(\alpha z) \\ M(z) = -E.I.y^{(2)} = -\dfrac{P}{4\alpha}.\eta_1.(\alpha z) \\ Q(z) = -E.I.y^{(3)} = -\dfrac{P}{2}.\eta_2.(\alpha z) \end{cases} \tag{9.24}$$

Trong đó, các hàm η_0, η_1, η_2 và η_3:

$$\begin{cases} \eta_0(\alpha z) = e^{-\alpha z}.(\cos\alpha z + \sin\alpha z) \\ \eta_1(\alpha z) = e^{-\alpha z}.(\cos\alpha z - \sin\alpha z) \\ \eta_2(\alpha z) = e^{-\alpha z}.\cos\alpha z \\ \eta_3(\alpha z) = e^{-\alpha z}.\sin\alpha z \end{cases}$$

* **Nhận xét:**

- Theo (9.24), dầm được xem là dài vô hạn nếu khoảng cách từ điểm đặt lực đến đến các đầu mút của dầm lớn hơn 2π/α.

- Phương pháp này có thể áp dụng cho các bài toán sau:

+ Dầm dài vô hạn chịu tải trọng phân bố đều q trên chiều dài l (Sử dụng nguyên lý cộng tác dụng).

+ Dầm dài nữa vô hạn chịu mômen và tải tập trung tại đầu mút dầm.

+ Dầm dài vô hạn chịu mômen tập trung.

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 9

1, Nêu giả thiết của công thức Juravski để tính ứng suất tiếp trên thanh chịu uốn phẳng.

2, Tâm uốn của một tiết diện mỏng chịu uốn phẳng là gì? Để xác định tâm uốn cần sử dụng những điều kiện nào?

3, Trình bày những giả thiết cơ bản khi tính dầm có tiết diện gồm nhiều lớp vật liệu. Viết điều kiện xác định vị trí đường trung hòa khi uốn dầm làm từ nhiều lớp vật liệu.

4, Nêu giả thiết về phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện mỏng kín chịu xoắn. So sánh điểm khác nhau về sự phân bố ứng suất tiếp trên các tiết diện mỏng kín và hở chịu xoắn.

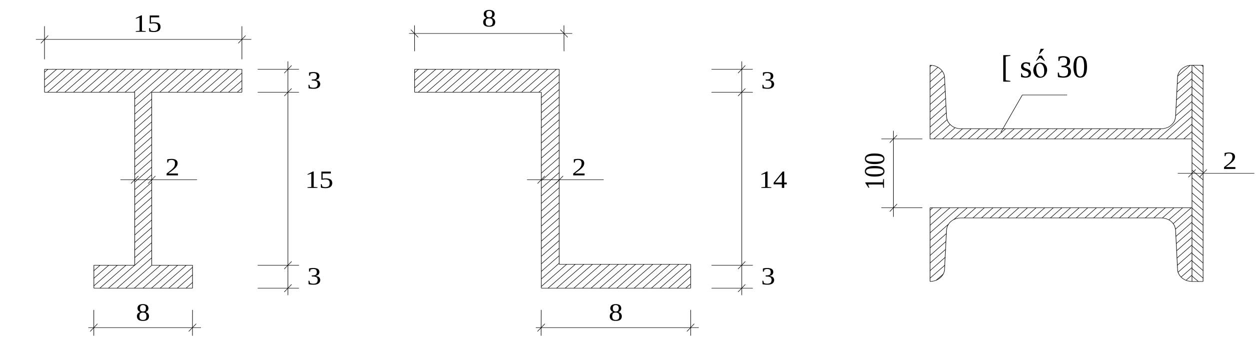
5, Nêu đặc điểm và biểu thức của mô hình nền Winkler. Ý nghĩa vật lý và thứ nguyên của hệ số nền.

6, Viết phương trình vi phân của độ võng dầm nằm trên nền đàn hồi Winkler.

BÀI TẬP THỰC HÀNH CHƯƠNG 9

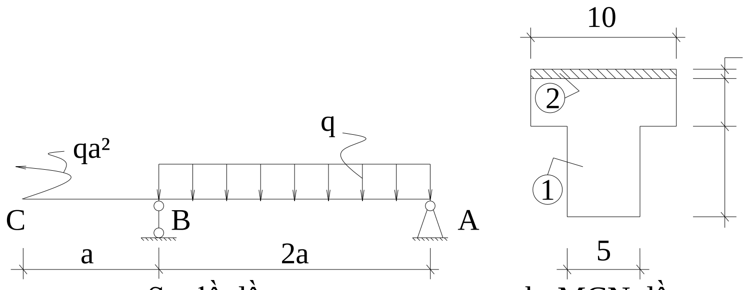
Bài 9.1: Xác định tâm uốn của các tiết diện(Hình 9.14):

Bài 9.2: Cho dầm có mặt cắt ngang (Hình 9.15). Xác định ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất phát sinh trong mỗi lớp vật liệu tại tiết diện nguy hiểm nhất. Biết: $E_2 = 20E_1$.



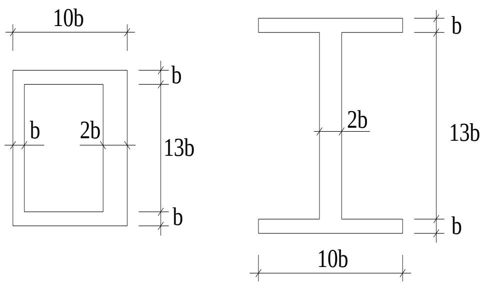
a, MCN 1 b, MCN 2 c, MCN 3

Hình 9.14: Xác định tâm uốn của các mặt cắt ngang trên.



a, Sơ đồ dầm b, MCN dầm

Hình 9.15: Dầm có MCN gồm hai lớp vật liệu (bài tập 2).



a, MCN kín b, MCN hở

Hình 9.16: Bài tập 3.

Bài 9.3: Xác định mômen xoắn lớn nhất để dầm có các dạng mặt cắt ngang (Hình 9.16) làm việc bình thường. Biết: $[\theta] = 10^{-4}$rad/cm và $G = 8.10^{3}$kN/cm^{2}.